DISKRĒTĀ MATEMĀTIKA

Diskrētā matemātika – matemātikas nozaru kopums, kas studē objektus, kuru īpašības mainās *diskrēti* (lēcienveidīgi, pārtraukti) , piemēram,

veselus skaitļus,

kopas (dažādu objektu sakopojumus),

grafus (tīklus).

Diskrētā matemātika ir mūsdienu datorzinātnes un datortehnikas matemātiskā bāze (jo datoros informācija tiek fiksēta un apstrādāta diskrētā veidā) :

Klasiskā (nepārtrauktā) matemātika visbiežāk nodarbojas ar “gludiem”, nepārtrauktiem objektiem: nepārtrauktām funkcijām.

Diskrētās matemātikas nodaļas, kas tiks apskatītas šajā kursā:

kopu teorija,

kopu attēlojumi un funkcijas,

attiecības,

matemātiskā loģika un tās pielietojumi;

kombinatorika,

grafu teorija.

KOPU TEORIJAS PAMATI

Pamatdefinīcijas

DEFINĪCIJA *Kopa* ir jebkuras dabas dažādu objektu (*kopas elementu*) kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu. Kopai un tās elementiem piemīt šādas raksturīgas īpašības:

1) visi kopas elementi tiek uzskatīti par dažādiem;

2) starp kopas elementiem nav uzdota nekāda kārtība, hierarhija vai sakarība;

3) kopas elementiem var būt dažāda daba un vienā kopā var pastāvēt dažādas dabas elementi.

Multikopa ir jebkuras dabas (iespējams, ar atkārtojumiem) elementu kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu. Ja kāds elements multikopā atkārtojas n reizes, tad saka, ka šī elementa *multiplicitāte (kārta)* dotajā multikopā ir vienāda ar n.

Ja objekts a tiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a *pieder kopai* A vai, ka A *satur elementu* a ($a \in A$).

Ja objekts a netiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a *nepieder kopai* A ($a \notin A$).

Kopu, kas nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšu kopu* (apzīmē ar simbolu $\varnothing$).

Ja kopa A satur galīgu skaitu elementu, tad to sauc par *galīgu* kopu un tās elementu skaitu apzīmē ar pierakstu $|A|$, pretējā gadījumā kopu sauc par *bezgalīgu* kopu.

Kopa ir elementārs (un pat uzskatīts par nedefinējamu) matemātisks jēdziens, uz kuru balstās matemātika.

Kopa ir tik plaši lietots jēdziens, ka bieži cilvēki operē ar tām it kā automātiski, nedomājot par to eksistenci.

Šajā tekstā ar terminu “kopa” mēs domāsim jēdzienu “kopa, kas nav tukša kopa”, ja tieši nebūs norādīts pretējais.

Bieži, strādājot ar ar noteiktas dabas elementu kopām, ir lietderīgi fiksēt arī visu iespējamo šīs dabas elementu kopu – *universu*, universs var mainīties atkarībā no situācijas un vajadzības.

Kopu piemēri:

visu naturālu skaitļu kopa , visu naturālu skaitļu kopa, kas ir mazāki nekā 10, visu alfabētu burtu kopa, visu plaknes punktu kopa, visu plaknes punktu kopa, kas pieder dotajai plaknes figūrai, visu dotās pilsētas iedzīvotāju kopa, u.t.t.

Multikopu piemēri:

visu cilvēku vārdu multikopa(dažiem cilvēkiem ir kopīgi vārdi, tāpēc tie atkārtojas),

visu kāda priekšmeta atomu multikopa (makroskopisks priekšmets sastāv no dažu ķīmisko elementu atomiem, kas atkārtojas “neskaitāmas” reizes).

Ja kāds elements multikopā atkārtojas n reizes, tad saka, ka šī elementa *multiplicitāte* dotajā multikopā ir vienāda ar n.

Kopu uzdošanas veidi

Kopas var uzdot šādos veidos:

aprakstot (pārskaitot) visus kopas elementus saraksta veidā (šī metode visbiežāk tiek izmantota ja kopas elementu skaits ir mazs), šajā gadījumā kopas elementus apvieno ar figūriekavām; piemēram, uzdosim kopu A, kas satur 3 elementus a, b, c:

$$A = \{a, b, c\},$$

acīmredzami kopa A ir galīga un $|A| = 3$,

gadījumā, ja kopa ir bezgalīga, lieto šādu pierakstu: $A = \{a_a\}_{a \in I}$, kur a ir indekss, ar kura starpniecību tiek pārskaitīti kopas elementi, un I ir šī indeksa vērtību kopa;

aprakstot kopas elementus raksturojošo īpašību izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus, šajā gadījumā izmanto dažāda veida pierakstu, visbiežāk raksturojošo īpašību ieslēdz figūriekavās, kurās ir atdaloša vertikāla svītra, pa kreisi no šīs svītras tiek uzdots universs, pa labi no atdalošās svītras tiek uzdota īpašība, kas piemīt uzdodamās kopas elementiem; piemēram, definēsim kopu A, kas satur visus naturālus skaitļus, kas ir lielāki nekā 10:

$$A = \{n \in N \mid n > 10\};$$

iegūstot kopu no jau iepriekš uzdotām kopām veicot ar tām noteiktas darbības (operācijas), piemēram, zemāk definēto kopu *papildinājumu*, *šķēlumu*, *apvienojumu*, *starpību*, *apakškopu konstruēšanu*, *faktorizēšanu*, *tiešo reizinājumu* un citas no tām atvasinātas operācijas.

Datoru atmiņā kopas parasti uzdod masīvu – skaitļu, simbolu, vārdu veidā.

Ja ar kopām ir jāstrādā kā ar datiem programmēšanā, tad tās var definēt arī šādos 2 veidos:

1) ar programmu, kas atpazīst universā dotās kopas elementus;
2) ar programmu, kas ģenerē visus dotās kopas elementus.

Kopu nosaukumus parasti apzīmēsim ar lielajiem latīņu burtiem un kopu elementus ar mazajiem latīņu vai grieķu burtiem.

Kopu vizualizācijas metode – Eilera-Venna diagrammas

Kopas tiek attēlotas kā plaknes apgabali. Šī metode var tikt pielietota, ja kopu skaits nav pārāk liels (2-4 kopas) un speciālgadījumos.

Kopu vienādība, apakškopas

DEFINĪCIJA Divas kopas A un B sauc par *vienādām* (apzīmē ar pierakstu $A = B$), ja izpildās šāds noteikums: ja $a \in A$, tad $a \in B$ un, ja $b \in B$, tad $b \in A$. Tukša kopa nav vienāda ne ar kādu netukšu kopu.

(citiem vārdiem sakot, kopas A un B nav atšķiramas viena no otras kā elementu kopumi).

DEFINĪCIJA Ja eksistē vismaz viens $a \in A$, tāds, ka $a \notin B$ vai vismaz viens $b \in B$, tāds, ka $b \notin A$, tad saka, ka kopas A un B nav vienādas ($A \neq B$).

DEFINĪCIJA Saka, ka kopa A ir kopas B *apakškopa* ($A \subseteq B$), ja izpildās šāds noteikums: ja $a \in A$, tad $a \in B$. Tukša kopa ir jebkuras kopas (arī tukšas kopas) apakškopa.

Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad saka, ka A ir *īsta* kopas B apakškopa($A \subset B$).

Ja $A \subseteq B$, tad saka, ka kopa B ir kopas A *aptverošā* kopa.

Par kopas apakškopu ir jādomā kā par kopas daļu.

Apakškopu vajadzības gadījumā uzskata par aptverošās kopas īstu apakškopu, lai uzsvērtu to apstākli, ka tā ir atšķirīga no aptverošās kopas.

Programmēšanā apakškopas bieži vien uzdod *bitu vektoru* veidā: ja ir dots galīga aptverošā kopa vai universs $\{a_1,...,a_n\}$, tad apakškopu A uzdosim kā bināru virkni ar garumu n, kurā elements ar numuru i ir 1, ja $a_i \in A$ un 0, ja $a_i \notin A$.

PIEMĒRS Ja aptverošā kopa ir $\{a,b,c,d,e,f\}$, tad apakškopai $\{b,c,f\}$ atbilst bitu vektors 011001.

Apakškopu īpašības:

1) Jebkura kopa A ir apakškopa attiecībā uz sevi: $A \subseteq A$;

2) Ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq C$, tad $A \subseteq C$, jo jebkurš kopas A elements ir arī kopas C elements;

3) Ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq A$, tad $A = B$ saskaņā ar kopu vienādības definīciju (šo īpašību parasti izmanto, lai pierādītu divu kopu vienādību);

4) Jebkura kopa ir apakškopa tai atbilstošajā universā.

Ja dota kopa A, tad šīs kopas visu apakškopu kopu apzīmē pierakstu $P(A)$ un sauc par šīs kopas *būleānu* (par godu britu matemātiķim Būlam (Boole) vai *pakāpes kopu*).

PIEMĒRI Ja $A = \{a, b, c\}$ un $B = \{a, b, c, d, e\}$, tad acīmredzami $A \subseteq B$ un pat $A \subset B$.

Fiksēsim kopu $A = \{a, b, c\}$ un pārskaitīsim visas šīs kopas apakškopas. Viegli redzēt, ka kopai A ir 8 apakškopas: tukšā kopa $\varnothing$; trīs kopas, katra no kurām satur vienu elementu: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$; trīs kopas, katra no kurām satur divus elementus: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$; kopa A.

Naturāls skaitlis ir vesels skaitlis, tātad visu naturālo skaitļu kopa N ir apakškopa visu veselo skaitļu kopā Z : $N \subseteq Z$.

Vesels skaitlis ir reāls skaitlis, tātad $Z \subseteq R$.

Apskatīsim taisni l plaknē p. Apzīmēsim visu taisnes punktu kopu ar L un visu plaknes punktu kopu ar Π, acīmredzami $L \subset \Pi$.

Operācijas ar kopām

DEFINĪCIJA Par kopas A *papildinājumu* sauc kopu $A' = \{u \in U \mid u \notin A\}$, kur U ir kopai A atbilstošais universs.

Par kopas papildinājumu ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no universa "izmet ārā" visus kopas A elementus.

PIEMĒRI

ja $A = \{1,2,3,4,5\}$ un $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, tad $A' = \{6,7,8,9,10\}$,

ja A ir visu pāra skaitļu kopa un $U = N$, tad A' ir visu nepāra skaitļu kopa,

ja $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ un $U = R^2$, tad $A' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$.

DEFINĪCIJA Par divu kopu A un B *apvienojumu* sauc kopu $A \cup B = \{u \in U \mid u \in A$ *vai* $u \in B\}$, kur U ir kopām A un B atbilstošais universs.

Vispārinājums: ja ir dota kopu kopa $\{A_a\}_{a\in I}$, tad par šīs kopas elementu apvienojumu sauc kopu $\bigcup_{a\in I} A_a = \{u \in U \mid$ *vismaz vienam* $a \in I$ *izpildās nosacījums* $u \in A_a\}$.

PIEMĒRI Par kopu apvienojumu ir jādomā kā par visu šo kopu elementu apvienošanu vienā kopā ignorējot atkārtojumus, kas var rasties, ja kopām ir kopīgi elementi. Šajā gadījumā nav svarīgi, ar ko ir vienāds universs, jo kopu apvienojums ir atkarīgs tikai no apvienojamo kopu elementiem.

PIEMĒRI ja $A = \{a, b, c\}$ un $B = \{b, c, d\}$, tad $A \cup B = \{a, b, c, d\}$,

ja $A = N$ un $B = Z$, tad $A \cup B = Z$,

ja $A_i = \{i\}$, tad $\bigcup_{i\in N} A_i = N$ (visu naturālo skaitļu apvienojums ir visu naturālo skaitļu kopa).

DEFINĪCIJA Par divu kopu A un B *šķēlumu* sauc kopu $A \cap B = \{u \in U \mid u \in A$ *un* $u \in B\}$.

Vispārinājums: ja ir dota kopu kopa $\{A_a\}_{a\in I}$, tad par šīs kopas elementu šķēlumu sauc kopu $\bigcap_{a\in I} A_a = \{u \in U \mid$ *katram* $a \in I$ *izpildās nosacījums* $u \in A_a\}$.

Par kopu šķēlumu ir jādomā kā par šo kopu kopējo daļu. Arī šajā gadījumā nav svarīgi, kāds ir universs.

Ja $A \cap B = \varnothing$, tad saka, ka kopas A un B ir *atdalītas*, jeb *šķirtas*.

PIEMĒRI ja $A = \{a, b, c, d\}$ un $B = \{c, d, e, f\}$, tad $A \cap B = \{c, d\}$,

ja A ir kādas plaknes Dekarta koordināšu sistēmas x-ass un B ir y-ass, tad $A \cap B$ ir koordinātu sākumpunkts.

DEFINĪCIJA Par divu kopu A un B *starpību* sauc kopu $A \setminus B = \{u \in U \mid u \in A \text{ un } u \notin B\}$.

Par divu kopu A un B starpību $A \setminus B$ ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no kopas A "izmet ārā" visus elementus, kas pieder kopai B.

Ievērosim, ka kopas papildinājums ir kopu starpības speciālgadījums: $A' = U \setminus A$.

Ievērosim arī vienādību $A \setminus B = A \cap B'$.

PIEMĒRI ja $A = \{a, b, c, d\}$ un $B = \{c, d, e, f\}$, tad $A \setminus B = \{a, b\}$, ja A ir visu pāra skaitļu kopa, tad $Z \setminus A$ ir visu nepāra skaitļu kopa.

DEFINĪCIJA Par divu kopu A un B *simetrisko starpību* sauc kopu $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Uzdodot kopas kā bitu vektorus var ērti atrast kopu operāciju rezultātus, jo kopu operācijas var viegli izteikt ar aritmētiskām operācijām.

Kopas A papildinājuma bitu vektors tiek iegūts no A bitu vektora mainot tajā vietām 0 un 1.

Kopu A un B šķēluma bitu vektors ir vienāds ar A un B *bitu vektoru reizinājumu*, kas tiek definēts šādā veidā: ja $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un $B = \{b_1, ..., b_n\}$, tad $AB = \{a_1 b_1, ..., a_n b_n\}$.

Kopu A un B apvienojuma bitu vektors ir vienāds ar A un B *bitu vektoru summu*, kas tiek definēta šādā veidā: ja $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un $B = \{b_1, ..., b_n\}$, tad $AB = \{a_1 + b_1, ..., a_n + b_n\}$, kur 0+0=1, 0+1=1+0=1 un 1+1=1 .

TEORĒMA (kopu operāciju īpašības)

1) Jebkurām kopām(ieskaitot tukšas kopas) A un B ir spēkā vienādības

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - šķēluma un apvienojuma *komutativitātes likumi*;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - šķēluma un apvienojuma *asociativitātes likumi*.

2) Jebkurām kopām A, B, C ir spēkā vienādības

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - *distributivitātes likumi*.

3) Jebkurām kopām A un B ir spēkā vienādības

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ - *dualitātes likumi*.

4) $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$, $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$,
$\varnothing \cup U = U$, $\varnothing \cap U = \varnothing$.

5) Jebkurai kopai A ir spēkā vienādības

$A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;
$A \cup U = U$, $A \cap U = A$;
$(A')' = A$ - papildinājuma *involūcijas* likums;
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$ - *idempotences* likumi.

Kopu faktorizācija

DEFINĪCIJA Ja ir dota kopa A un tās apakškopu kopa $A_I = \{A_a\}_{a \in I}$, tāda, ka $\bigcup_{a \in I} A_a = A$, tad kopu A_I sauc par kopas A *pārklājumu.*

Ja papildus vēl izpildās nosacījums, ka jebkuru divu kopas A_I elementu šķēlums ir tukša kopa (kā kopas A apakškopa), tad saka, ka A_I ir kopas A *sadalījums* vai *faktorkopa* un kopas A_I elementi ir *sadalījuma klases*.

Pāreju no A uz A_I sauc par kopas A *faktorizāciju* attiecībā uz doto apakškopu sistēmu $\{A_a\}_{a \in I}$.

Faktorizācija ir svarīga kopu teorijas *operācija*, kas ļauj pāriet no kopas uz šīs kopas daļu kopu, kuru elementiem piemīt kopīgas īpašības.

Strādājot ar *faktorkopām* ir lietderīgi sadalījuma klašu vietā strādāt ar šo klašu elementiem – *klašu pārstāvjiem:* lai aprakstītu *faktorkopu*, ir pietiekami atrast vienu elementu katrā *sadalījuma klasē*.

PIEMĒRI. Pāra skaitļu kopa un nepāru skaitļu kopa veido visu veselu skaitļu kopas sadalījumu, šajā gadījumā faktorkopa satur divus elementus, kurus var identificēt ar skaitļiem 0 un 1 – atlikumiem, kurus iegūst, dalot ar 2 naturālus skaitļus.

Cilvēku kopā sadalījums pēc, piemēram, pilsonības vai acu krāsas pazīmes definē faktorkopas, kuras elementiem atbilst valstis vai krāsas.

Plaknes punktu kopā taisnes, kas paralēlas fiksētai taisnei, veido sadalījumu, kuram atbilstošās faktorkopas elementus var identificēt ar taisnes punktiem šādā veidā: uzzīmēsim vēl vienu taisni l , kas nav paralēla nevienai no dotajām taisnēm, katra no paralēlajām taisnēm krusto taisni l vienā punktā, pie tam jebkurām divām dažādām taisnēm šie krustpunkti ir dažādi un katrs taisnes l punkts ir viens no šiem krustpunktiem, visi šie apsvērumi kopumā nozīmē, ka faktorkopas elementus var identificēt ar taisnes l punktiem.

Kopu tiešais reizinājums

DEFINĪCIJA Par *sakārtotu pāri* sauc kopu, kas satur divus elementus un kurā ir definēta kārtība: tiek norādīts, kurš no diviem elementiem ir pirmais, un kurš – otrais.

Sakārtotu pāri apzīmē ieslēdzot kopas elementus parastajās iekavās vai kvadrātiekavās noteiktajā kārtībā, pirmais elements tiek rakstīts kreisajā pusē, otrais – labajā pusē; piemēram - (a,b) vai $[a,b]$.

Par *sakārtotu* n *elementus garu virkni (n-virkni)* sauc kopu, kas satur n elementus un kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs (no 1 līdz n).

Sakārtotu virkni apzīmē ieslēdzot kopas elementus parastajās iekavās vai kvadrātiekavās noteiktajā kārtībā, elementi tiek rakstīti no kreisās puses uz labo; piemēram $(a_1,a_2,...,a_n)$ vai $[a_1,a_2,...,a_n]$.

Par *bezgalīgu virkni* sauc bezgalīgu kopu, kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs(naturāls skaitlis).

DEFINĪCIJA Par divu kopu A un B *tiešo* vai *Dekarta reizinājumu* (par godu franču matemātiķim Dekartam) sauc kopu (apzīmē ar pierakstu $A\times B$), kuras elementi ir visi sakārtoti elementu pāri, kuros pirmais elements pieder kopai A, bet otrais elements pieder kopai B: $A\times B=\{[a,b] \mid a\in A$ *un* $b\in B\}$.

Ja ir dotas kopas $A_1,A_2,...,A_n$, tad par šo kopu tiešo vai Dekarta reizinājumu $A_1\times A_2\times...\times A_n$ sauc kopu, kuras elementi ir visas sakārtotas n elementus garas virknes, kurās elements ar kārtas numuru i

pieder kopai A_i: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{[a_1, a_2, ..., a_n] \mid$ *katram* i *izpildās nosacījums* $a_i \in A_i\}$.

Ja ir dota (iespējams, bezgalīga) kopu kopa $\{A_a\}_{a \in N}$, kurā indekss a ir naturāls skaitlis, tad par šīs kopas elementu tiešo reizinājumu $\prod_{a \in N} A_a$ sauc kopu, kas satur visas virknes, kurās elements ar kārtas numuru i pieder kopai A_i.

Kopas, kas piedalās tiešajā reizinājumā, sauc par tā *reizinātājiem*.

Ja tiešajā reizinājumā visi reizinātāji ir vienādi ($A_i = A$ katram i), tad tiešo reizinātāju sauc par A *pakāpi* (apzīmē ar A^n).

Ja vismaz no reizinātājiem ir tukša kopa, tad reizinājums ir tukša kopa.

PIEMĒRI $A = \{a, b\}$ un $B = \{x, y\}$, tad $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$;

ja $A = R$ (skaitļu taisne), tad $A \times A = A^2$ var identificēt ar plakni šādā veidā: definēsim plaknē Dekarta koordinātes, katram plaknes punktam Dekarta koordinātes (sakārtots skaitļu pāris) ir viennozīmīgi noteiktas, un otrādi, katrs sakārtots skaitļu pāris viennozīmīgi nosaka punktu dotajā Dekarta koordinātu sistēmā.

Pēdējais piemērs rāda, ka par divu kopu A un B tiešo reizinājumu $A\times B$ ir lietderīgi domāt kā par tabulu, kuras rindas tiek indeksētas ar pirmās kopas A elementiem un kolonnas tiek indeksētas ar otrās kopas B elementiem, tabulas rūtiņai, kuras rindai atbilst elements $a\in A$ un kuras kolonnai atbilst elements $b\in B$, atbilst tiešā reizinājuma elements (a,b).

Ja $A\neq B$, tad acīmredzami $A\times B\neq B\times A$.

Cik elementu ir kopā $A\times B$ *?*

Ja kopas A un B ir galīgas un $|A|=n, |B|=m$, tad $|A\times B|=nm$, jo pāra pirmo elementu mēs varam izvēlēties n veidos un pāra otro elementu varam izvēlēties neatkarīgi no pirmā m veidos.

Divu kopu vienādības pierādīšana

Divu kopu vienādību var pierādīt vai atspēkot izmantojot:

1) kopu vienādības īpašību;
2) kopu operāciju īpašības;
3) incidences tabulu jeb elementāršķēlumus;
4) Eilera diagrammas.