NEATKARĪGUMS UN SEGUMI

Teiksim, ka virsotne *sedz* tai incidentās šķautnes un šķautne *sedz* tai incidentās virsotnes.

Virsotņu kopu, kas sedz visas grafa šķautnes, sauksim par grafa *virsotņu segumu.* Elementu skaitu minimālā virsotņu segumā sauksim par grafa *virsotņu seguma skaitli,* $a_0(\Gamma)$.

Šķautņu kopu, kas sedz visas grafa virsotnes, sauksim par grafa *šķautņu segumu.* Elementu skaitu minimālā šķautņu segumā sauksim par grafa *šķautņu seguma skaitli,* $a_1(\Gamma)$.

Virsotņu kopu sauksim par neatkarīgu, ja nekādas divas no tām nav incidentas.

Elementu skaitu maksimālā neatkarīgā virsotņu kopā sauksim par grafa *virsotņu neatkarības skaitli*, $b_0(\Gamma)$. Maksimālu neatkarīgu virsotņu kopu sauksim arī par *kodolu*.

Šķautņu kopu sauksim par *neatkarīgu,* ja nekādas divas no tām nav incidentas. Elementu skaitu maksimālā neatkarīgā šķautņu kopā sauksim par grafa *šķautņu neatkarības skaitli,* $b_1(\Gamma)$.

Neatkarīgu šķautņu kopu sauksim par *perfektu*, ja tā sedz visas grafa virsotnes. Perfekta neatkarīga šķautņu kopa var eksistēt tikai tad, ja grafa virsotņu skaits ir pāra skaitlis.

TEORĒMA 3.32. Katram grafam $\Gamma=(V,E)$ ir spēkā sakarība

$$a_0(\Gamma)\geq\sum_{v\in V}\frac{1}{1+d(v)}.$$

PIERĀDĪJUMS Pilniem grafiem ir spēkā vienādība, tāpēc uzskatītsim, ka grafs nav pilns.

Izmantosim pastiprināto matemātisko indukciju ar virsotņu skaitu kā indukcijas argumentu.

Indukcijas bāze ir patiesa, jo nevienādību var viegli pārbaudīt uz grafiem, kuru virsotņu skaits nepārsniedz 2.

Izdarīsim indukcijas pieņēmumu: pieņemsim, ka nevienādība ir patiesa visiem grafiem, kuru virsotņu skaits ir mazāks nekā k. Fiksēsim grafu $\Gamma=(V,E)$, kuram |V|=k. Apskatīsim virsotni t, kuras pakāpe ir minimāla. Tā kā grafs Γ nav pilns, tad $t\cup N(t)\neq V$. Definēsim $\Gamma'=\Gamma-(t\cup N(t))$ (izdzēsīsim grafā Γ kopas $t\cup N(t)$ virsotnes). Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu, grafā Γ' izpildās pierādāmā nevienādība. Pieņemsim, ka U ir neatkarīga virsotņu kopa grafā Γ' ar maksimālu virsotņu skaitu. Kopa $t\cup U$ ir neatkarīga grafā Γ, tāpēc mums ir jāpierāda, ka summa $S_1 = \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_\Gamma(v)}$ nepārsniedz summu $S_2 = \sum_{v \in V(\Gamma')} \frac{1}{1 + d_{\Gamma'}(v)} + 1$. Apzīmēsim ar W to virsotņu kopas V apakškopu, kuras ir savienotas ar kādu no kopas N(t) virsotnēm. Locekļi summās S_1 un S_2, kas atbilst virsotnēm no kopas $V(\Gamma') \setminus W$, ir vienādi, bet locekļi summā S_1, kas atbilst virsotnēm no kopas W, ir mazāki nekā atbilstošie locekļi summā S_2. Tādējādi mums ir jāpierāda, ka atlikušo summas S_1 locekļu summa nepārsniedz 1:

$$\frac{1}{1 + d_\Gamma(t)} + \sum_{u \in N(t)} \frac{1}{1 + d_\Gamma(u)} \overset{?}{\leq} 1 .$$

Tā kā virsotnes v pakāpe ir minimāla, tad $d_\Gamma(t) \leq d_\Gamma(u)$ visiem $u \in N(t)$, tāpēc

$$\frac{1}{1 + d_\Gamma(t)} + \sum_{u \in N(t)} \frac{1}{1 + d_\Gamma(u)} \leq \frac{1}{1 + d_\Gamma(t)} + d_\Gamma(t) \frac{1}{1 + d_\Gamma(t)} = 1$$

QED

SECINĀJUMS 3.33. Katram grafam $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā sakarība

$$a_0(\Gamma) \geq \frac{|V|}{1 + d},$$

kur $d = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ *(vidējā aritmētiskā pakāpe).*

PIERĀDĪJUMS Izmantosim Košī-Buņakovska nevienādību

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} .$$

Redzam, ka

$$(\sum_{v\in V}\frac{\sqrt{1+d(v)}}{\sqrt{1+d(v)}})^2 \le \sum_{v\in V}(1+d(v))\sum_{v\in V}\frac{1}{1+d(v)},$$

tāpēc

$$|V|^2 \le \sum_{v\in V}(1+d(v))\sum_{v\in V}\frac{1}{1+d(v)} \le a_0(\Gamma)\sum_{v\in V}(1+d(v)) .$$

Beidzot iegūstam, ka

$$a_0(\Gamma) \ge \frac{|V|^2}{|V|+|V|d} = \frac{|V|}{1+d} .$$

TEORĒMA 3.32. Jebkuram netriviālam sakarīgam grafam ir spēkā sakarība

$$a_0 + b_0 = a_1 + b_1 = V . \qquad (3.4)$$

PIERĀDĪJUMS Ja U ir minimāls virsotņu segums, tad $V(\Gamma)\setminus U$ ir neatkarīga virsotņu kopa, tāpēc $|V(\Gamma)\setminus U| \le b_0$ un $a_0 + b_0 \ge V$.

Ja W ir maksimāla neatkarīga kopa, tad $V(\Gamma)\setminus W$ ir virsotņu segums un $a_0 + b_0 \le V$.

Ja U' ir minimāls šķautņu segums, tad ievērosim, ka U' nesatur ķēdes ar garumu lielāku nekā 3, tātad U' ir m koku ar diametru 1 un 2 apvienojums. Redzam, ka

$|U'| = a_1 = \sum_{i=1}^{m} n_i$, kur n_i ir šķautņu skaits i-tajā kokā. Tā kā i-tajā kokā ir $n_i + 1$ virsotne, tad $V = \sum_{i=1}^{m}(n_i + 1) = m + a_1$. Maksimālā neatkarīgā šķautņu kopā elementu skaits ir lielāks nekā m, tā kā dažādu koku šķautnes ir neatkarīgas, tātad $a_1 + b_1 \geq a_1 + m = V$.

Beidzot, pieņemsim, ka W' ir maksimāla neatkarīga šķautņu kopa. Ievērosim, ka kopa W' nosedz $2b_1$ virsotnes un nenosegtas paliek $V - 2b_1$ virsotnes. Konstruēsim šķautņu segumu $W' \cup T$, kur T satur $V - 2b_1$ šķautnes, katra no kurām nosedz vismaz vienu no kopas W' nenosegtajām virsotnēm. Tātad $|W' \cup T| = b_1 + V - 2b_1 \leq a_1$ un $a_1 + b_1 \leq V$. *QED*

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs. Virsotņu kopu $S \subset V$ sauksim par *dominējošu*, ja $S \cup \Gamma(S) = V$, citiem vārdiem sakot, jebkurai virsotnei $v \in V$ vai nu $v \in S$ vai arī eksistē virsotne $s \in V$ un šķautne $[v, s] \in E$.

TEORĒMA 3.33. Neatkarīga virsotņu kopa ir maksimāla tad un tikai tad, ja tā ir dominējoša.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka virsotņu kopa $S \subset V$ ir maksimāla neatkarīga. Pieņemsim, ka tā nav dominējoša. Tad eksistē virsotne v, kas atrodas attālumā lielākā kā 1 no visām kopas S virsotnēm. Šo virsotni var pievienot S saglabājot neatkarību, kas ir pretruna. Pieņemsim, ka S ir neatkarīga dominējoša kopa. Pieņemsim, ka tā nav maksimāla. Tad eksistē virsotne v, kas nav incidenta ne ar vienu kopas S virsotni, tas ir, atrodas attālumā lielākā kā 1 no visām S virsotnēm, tas ir pretrunā ar to, ka S ir dominējoša kopa. *QED*

Pielietojumos svarīgs uzdevums ir dotajam grafam atrast dominējošo kopu ar minimālo virsotņu skaitu.

PIEMĒRS Izmantojot neatkarīgas šķautņu kopas jēdzienu, var iekodēt šāda ģeometriska kombinatorikas uzdevuma objektus. Pieņemsim, ka mums ir dots taisnstūris ar izmēriem nxm, kur vismaz viens no n vai m ir pāra skaitlis, uzskatīsim ka tas ir sadalīts 1x1 rūtiņās. Mēģināsim noklāt šādu taisnstūri ar 1x2 domino figūrām. Iekodēsim taisnstūri kā grafu, kura virsotnes ir tā rūtiņu centri un šķautnes savieno divas virsotnes tad un tikai tad, ja atbilstošajām rūtiņām ir kopīga ģeometriskā šķautne. Var redzēt, ka katrai perfektai neatkarīgai šķautņu kopai grafā savstarpēji viennozīmīgi atbilst taisnstūra noklājums ar domino figūrām.

Grafa virsotņu kopu var mēģināt sadalīt apakškopu apvienojumā tā, lai katrā apakškopā virsotnes būtu neatkarīgas. Tradicionāli šādu procedūru sauc par *grafu krāsošanu*.

Par grafa *virsotņu krāsojumu (krāsojumu)* sauc funkciju no grafa virsotņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām incidentām virsotnēm nav piekārtota viena krāsa.

Mazāko krāsu skaitu, ar kuru dotajam grafam eksistē krāsojums, sauc par grafa *virsotņu hromatisko skaitli*, to apzīmē ar $c(\Gamma)$ vai $c_0(\Gamma)$.

Grafu sauc par *k-krāsojamu*, ja $k \geq c(\Gamma)$. Grafu sauc par *k-hromatisku*, ja $k = c(\Gamma)$.

Par grafa *hromatisko polinomu* sauc funkciju $p_\Gamma : V(\Gamma) \to N$, kur $p_\Gamma(i)$ ir dažādo grafa Γ krāsojumu skaits ar i krāsām.

Grafu sauc par *perfektu*, ja tā katram pilnam apakšgrafam Γ' izpildās nosacījums $c(\Gamma') = w(\Gamma')$. Līdzīgi var definēt grafa šķautņu krāsojumu un ar to saistītās īpašības.

Par grafa *šķautņu krāsojumu* sauc funkciju no grafa šķautņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām incidentām šķautnēm nav piekārtota viena krāsa. Mazāko krāsu skaitu, ar kuru dotajam grafam eksistē šķautņu krāsojums, sauc par grafa *šķautņu hromatisko skaitli*, $c_1(\Gamma)$.

TEORĒMA 3.34.

1) $c \leq 1 + \Delta$ (Δ - maksimālā virsotnes pakāpe grafā);

2) $\frac{V}{b_0} \le c \le V - b_0 + 1$;

3) $2\sqrt{V} \le c(\Gamma) + c(\overline{\Gamma}) \le V + 1$;

4) $V \le c(\Gamma) c(\overline{\Gamma}) \le (\frac{V+1}{V})^2$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs lasītājam. *QED*

PIEMĒRS Augstskolā ir jāorganizē vairākas nodarbības tā, lai katrs students varētu piedalīties vienā nodarbībā. Katram studentam obligāti ir jāpiedalās katrā viņam/viņai paredzētā nodarbībā. Kāds ir minimāli iespējamais laiks, kas ir nepieciešams, ja nodarbība notiek vienu stundu? Modelēsim šo uzdevumu ar grafu Γ, kura virsotnes ir nodarbības un šķautnes saista divas nodarbības tad un tikai tad, ja vismaz viens students piedalās abās nodarbībās. Var redzēt, ka minimālais laiks ir vienāds ar $c(\Gamma)$.

PLANARITĀTE

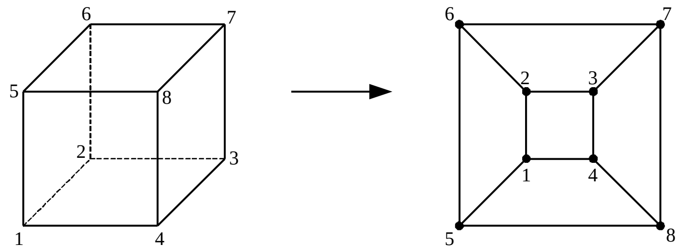
Grafu sauksim par *plakanu*, ja tas ir uzzīmēts tā, ka šķautnes nekur nekrustojas, izņemot virsotnes.

Grafu sauksim par *planāru*, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka šķautnes krustojas tikai galapunktos. Planāra grafa pārveidošanu par plakanu grafu sauksim par *plakanizāciju*.

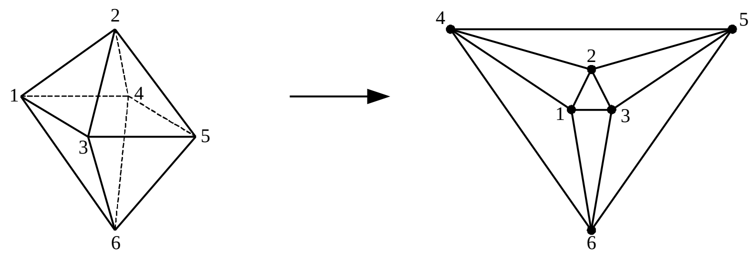
Viegli redzēt, ka katrs planāra grafa apakšgrafs ir planārs.

Sakarīgs grafs ir planārs tad un tikai tad, ja katrs tā bloks ir planārs.

PIEMĒRS



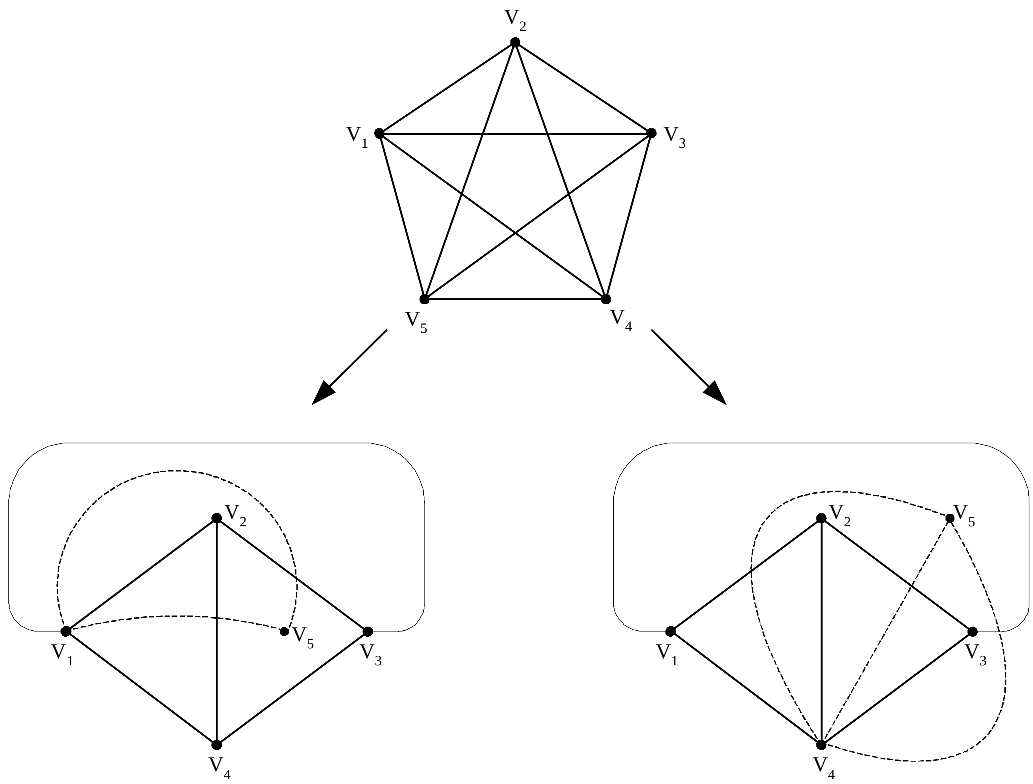
(a)



(b)

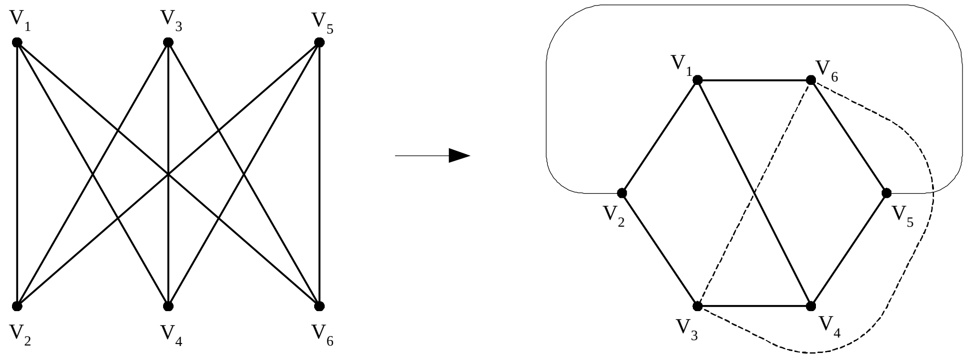
Zīm. 3.58. – planāru grafu plakanizācijas piemēri.

Pierādīsim, ka grafs K_5 nav planārs. Jebkurš tā pilnais apakšgrafs, kas satur četras virsotnes, ir planārs, tāpēc to var attēlot plaknē kā plakanu grafu. Pēdējā, piektā, virsotne var būt vai nu ārējā skaldnē, vai arī vienā no iekšējām. Šī virsotne ir jāsavieno ar katru no pārējām četrām virsotnēm un katrā no šiem diviem gadījumiem eksistē viena virsotne, kuru nevar savienot ar piekto virsotni tā, lai nekrustotu pilnā grafa K_4 šķautnes:



Zīm. 3.59. - ilustrācija grafa K_5 neplanaritātes pierādījumam.

Pierādīsim, ka grafs $K_{3,3}$ nav planārs. Jebkurš tā apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un visas šķautnes izņemot vienu, ir planārs, tāpēc to var attēlot plaknē kā plakanu grafu. Pēdējā šķautne savieno divas pretējas virsotnes un tā var būt vai nu ārējā skaldnē vai divās iekšējās skaldnēs. Katrā no šiem diviem gadījumiem pēdējā šķautne krusto vismaz vienu no pārējām šķautnēm:



Zīm. 3.60. - ilustrācija grafa $K_{3,3}$ neplanaritātes pierādījumam.

Par grafa *biezumu* sauc tā minimālu planāru apakšgrafu skaitu, kuru apvienojums ir vienāds ar doto grafu.

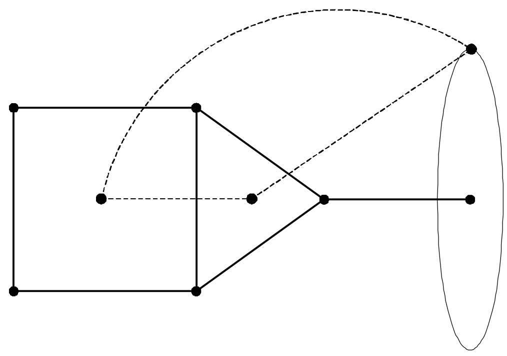
Par plakana grafa *skaldni* sauc plaknes apgabalu, ko ierobežo šķautnes (ieskaitot ārējo apgabalu), skaitu apzīmē ar $r(\Gamma)$.

Var redzēt, ka katram plakanam grafam ir tieši viena neierobežota skaldne, kuru sauksim par *ārējo* skaldni, pārējās skaldnes sauksim par *iekšējām*.

Var redzēt arī, ka planāru grafu var uzzīmēt plaknē tā, ka izvēlēta virsotne piederēs ārējai skaldnei.

Par plakana grafa Γ *duālo multigrafu* sauc grafu Γ^*, kas tiek konstruēts šādā veidā. Katrā grafa Γ skaldnē izvēlēsimies vienu punktu, visi šie punkti veidos duālā multigrafa Γ^* virsotņu kopu. Katrai grafa Γ šķautnei piekārtosim vienu multigrafa Γ^* šķautni, savienojot tās

Γ^* virsotnes, kurām atbilstošās skaldnes ierobežo dotā Γ šķautne. Ievērosim, ka multigrafā Γ^* tiešām var būt vairākas šķautnes starp divām virsotnēm un var būt arī cilpas.



Zīm. 3.61. – plakana grafa un tā duālā multigrafa piemērs.

Planāru grafu sauksim par *ārēji planāru*, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka visas tā virsotnes pieder vienai skaldnei.

Planāro grafu teorija tiek pielietota tādās inženierzinātnēs kā autoceļu projektēšana, mikroshēmu projektēšana u.c.

TEORĒMA 3.35. *(Eilera formula)* Sakarīgam plakanam grafam ir spēkā formula

$$V-E+r=2 \tag{3.5}$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim matemātisko indukciju ar argumentu E.

Bāze: E=0,V=1,r=1.

Pieņemsim, ka formula ir pareiza visiem grafiem ar E šķautnēm. Pievienosim vēl vienu šķautni un pierādīsim, ka formula paliek spēkā.

Ja pievienotā šķautne savieno jau eksistējošas virsotnes, tad E'=E,V'=V,r'=r+1 un, tātad V'-E'+r'=2.

Ja pievienotā šķautne savieno jau eksistējošu virsotni ar jaunu, tad E'=E+1,V'=V+1,r'=r un atkal V'-E'+r'=2. *QED*

Šo teorēmu var pierādīt arī citā veidā. Sākot ar plakanu grafu, pakāpeniski izdzēsīsim šķautnes tā, lai beigās iegūtu sākotnējā grafa pārklājošo koku. Šāds process vienmēr ir iespējams, jo pārklājošais koks eksistē jebkuram sakarīgam grafam. Katra šķautnes izdzēšana saglabā lielumu V-E+r, kokam tas ir vienāds ar 2, tātad arī sākotnējam grafam tas ir vienāds ar 2.

SECINĀJUMS 3.35. Ja Γ - sakarīgs planārs grafs (p>3), tad $E \le 3V - 6$.

PIERĀDĪJUMS Katru skaldni ierobežo vismaz 3 šķautnes , katra šķautne ierobežo ne vairāk kā 2 skaldnes.

Apiesim katru skaldni un skaitīsim šķautnes, pieņemsim, ka šis skaitlis ir N.

No vienas puses, $N \geq 3r$, jo katras skaldnes ieguldījums ir ne mazāks par 3.

No otras puses, $N \leq 2E$, jo katras šķautnes ieguldījums ir ne lielāks kā 2.

Iegūstam, ka $3r \leq 2E$, tātad $2 = V - E + r \leq V - E + \frac{2E}{3}$ un $E \leq 3E - 6$. *QED*

Grafus Γ_1 un Γ_2 sauc par *homeomorfiem*, ja Γ_2 var iegūt no Γ_1 veicot galīgu skaitu šķautņu sadalīšanu.

TEORĒMA 3.36. *(Kuratovska kritērijs)* Grafs ir planārs tad un tikai tad, ja tas nesatur apakšgrafu homeomorfu ar K_5 vai $K_{3,3}$.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums ir grūts un netiks dots šajā tekstā.

80. gados izmantojot datorus tika pierādīta šāda teorēma.

TEORĒMA *(teorēma par četrām krāsām)* Jebkuram planāram grafam eksistē krāsojums ar četrām krāsām (ja grafs Γ ir planārs, tad $c(\Gamma) \le 4$).