KOKI

IEVADS

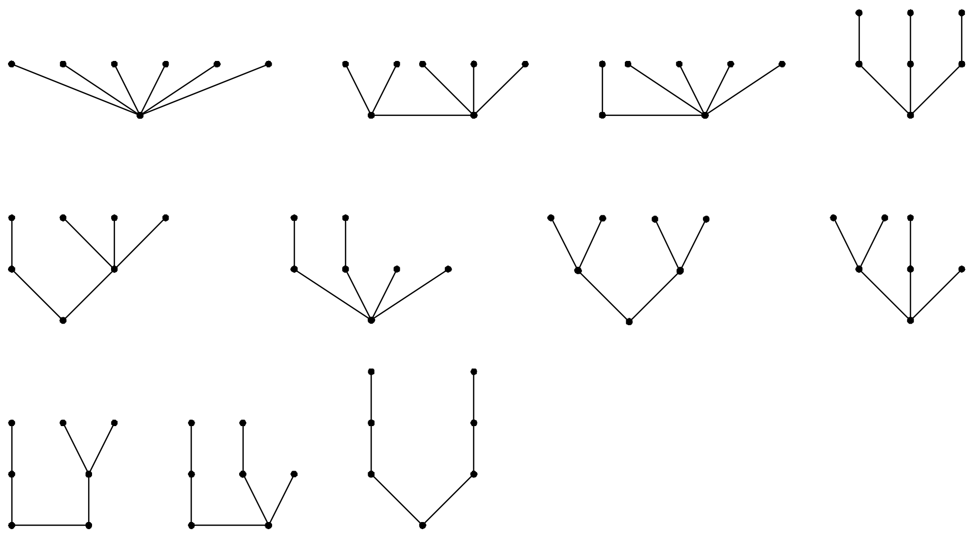
Par *aciklisku grafu* jeb *mežu* sauksim grafu, kurā nav inducētu apakšgrafu, kas ir izomorfi cikliem.

Par *koku* sauksim sakarīgu aciklisku grafu.

Grafa apakšgrafu, kas satur visas virsotnes un ir koks, sauksim par grafa *pārklājošo koku* jeb *skeletu*.

Par *orientētu aciklisku grafu* sauksim orientētu grafu bez orientētiem cikliem.

PIEMĒRI



Zīm. 3.38. – visi koku izomorfismu tipi ar 7 virsotnēm.

TEORĒMA 3.16. Γ grafs ar V virsotnēm un E šķautnēm. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ - koks;
2) Γ - sakarīgs grafs un E=V-1;
3) Γ - aciklisks grafs un E=V-1;
4) jebkuras divas dažādas virsotnes savieno tieši viena ķēde;
5) Γ - aciklisks grafs, kuram pievienojot vienu jaunu šķautni iegūst grafu ar tieši vienu ciklu.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu izmantojot ciklisko pierādīšanas tehniku – ir jāpierāda, ka

$$1) \to 2) \to 3) \to 4) \to 5) \to 1)\ .$$

$1) \to 2)$: Izmantosim matemātisko indukcija pēc V. Ja V=1, tad izteikums ir acīmredzams (E=0). Ja V>1, tad jebkurai šķautnei e grafs $\Gamma - e$ satur 2 komponentes – kokus (grafā Γ nav ciklu) T_1, T_2. Pieņemsim, ka šajās komponentēs ir V_1, V_2 virsotnes un E_1, E_2 šķautnes, kas saskaņā ar induktīvo pieņēmumu apmierina nosacījumus $E_i = V_i - 1$. Iegūstam, ka

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + 1 = (V_1 - 1) + (V_2 - 1) + 1 = \\ &= (V_1 + V_2) - 1 = V - 1 \end{aligned}$$

$2) \to 3)$ Γ ir sakarīgs grafs un E=V-1. Jāpierāda, ka grafā nav ciklu. Pieņemsim, ka eksistē cikls, kas satur šķautni ***e***. Grafs $\Gamma - e$ ir sakarīgs un satur V-2 šķautnes. Tāds grafs nevar būt sakarīgs, jo tam šķautņu skaits ir par 2 mazāks nekā virsotņu skaits.

$3)\to 4)$ Pieņemsim, ka Γ ir aciklisks un E=V-1. Pieņemsim, ka grafa komponenšu skaits ir C un i-tās komponentes virsotņu un šķautņu skaits ir V_i un E_i. Tā kā katra koponente ir koks, tad $E_i = V_i - 1$ un

$$E = E_1 + ...E_C = (V_1 - 1) + ... + (V_C - 1) = V - C.$$

Redzam, ka C=1 un grafs ir sakarīgs. Ja eksistētu 2 virsotnes, kuras saista 2 ķēdes, tad eksistē cikls.

$4)\to 5)$. Ja grafā būtu cikls, tad eksistētu divas dažādas ķēdes, kas saistītu divas virsotnes. Ja, pievienojot vienu šķautni iegūtu divus dažādus ciklus, tad sākotnējā grafā starp attiecīgajām virsotnēm eksistētu divas dažādas ķēdes.

$5)\to 1)$. Pierādīsim, ka grafs ir sakarīgs. Ja virsotnes u un v piederētu 2 dažādām komponentēm, tad pievienojot škautni (u,v) mēs neiegūtu ciklu. *QED*

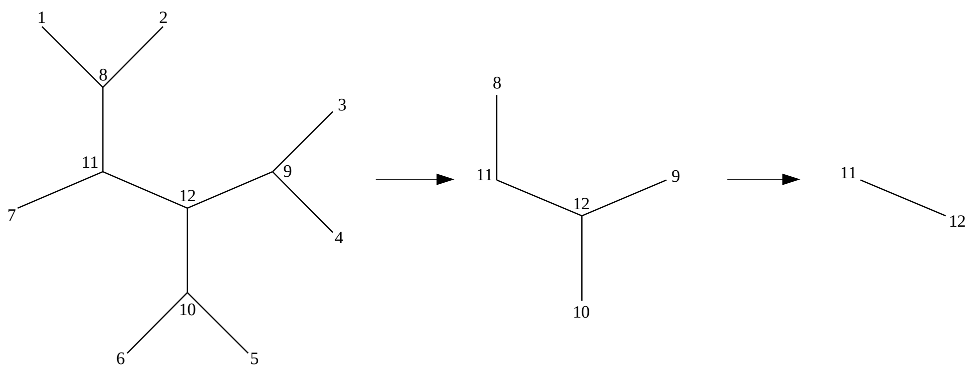
SECINĀJUMS Ja sakarīgam grafam ar n virsotnēm ir vismaz n šķautnes, tad tas satur ciklu.

TEORĒMA 3.17. Kokā ir vismaz 2 virsotnes ar pakāpi 1.
PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka kokā ir V virsotnes. Sanumurēsim visas koka virsotnes ar skaitļiem no 1 līdz V un apzīmēsim i-tās virsotnes pakāpi ar d_i. Tā kā $\sum_{i=1}^{V} d_i = 2(V-1)$, tad vismaz 2 saskaitāmie kreisajā pusē ir 1. *QED*

Kokam, tāpat kā vispārīgam grafam, ir definēts centrs, diametrs un rādiuss.

TEORĒMA 3.18. Koka centrs satur 1 vai 2 virsotnes.
PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs satur vismaz 3 virsotnes.

Sāksim izdzēst virsotnes ar pakāpi 1. Sākotnējā grafā Γ atzīmēsim visas virsotnes ar pakāpi 1 un visas tās izdzēsīsim. Iegūsim jaunu grafu Γ_1, kura centrs sakrīt ar sākotnējā grafa centru, tāpēc, ka katras virsotnes ekscentritāte samazinās par 1. Atkārtosim šo procedūru vairākas reizes, kamēr iegūsim triviālo grafu vai K_2, kuriem centrs satur vienu vai divas virsotnes. *QED*



Zīm. 3.39. – ilustrācija teorēmas 4.17. pierādījumam.

TEORĒMA 3.19. Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.
PIERĀDĪJUMS Ja grafs sākotnēji nav koks, tad pakāpeniski izdzēsīsim šķautnes, kas ieiet ciklos. Tā kā neviena šāda šķautne nevar būt tilts, tad tās izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu. Katrā šādā izdzēšanas operācijā virsotņu skaits

nemainās, bet šķautņu skaits samazinās par 1. Pēc galīga skaita soļu mēs iegūsim sakarīgu grafu, kuram izpildās sakarība E=V-1, tādējādi šis jauniegūtais grafs is sākotnējā grafa apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un ir koks. *QED*

Grafa dažādo pārklājošo koku skaits ir tā invariants, ko sauksim par grafa *kompleksitāti*.

Var redzēt, ka katrs koks ir divdaļīgs.

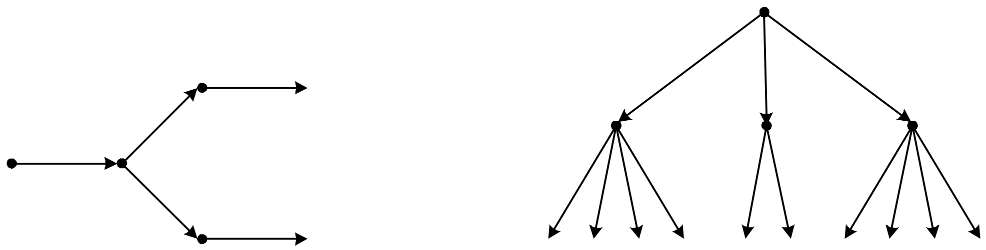
ORIENTĒTI, SAKĀRTOTI UN BINĀRI KOKI

Orientētu grafu sauksim par *orientētu koku (orientētu saknotu koku)*, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) eksistē viena virsotne (sakne), kuras pozitīvā pakāpe ir 0;
2) visu pārējo virsotņu pozitīvā pakāpe ir 1;
3) eksistē tieši viena virzīta ķēde no saknes uz jebkuru citu virsotni.

Aizmirstot orientāciju iegūst (parasto) koku. Katru koku var pārvērst par orientētu koku, izvēloties sakni, katrai saknes izvēlei atbildīs cits orkoks.

PIEMĒRI



(a) (b)

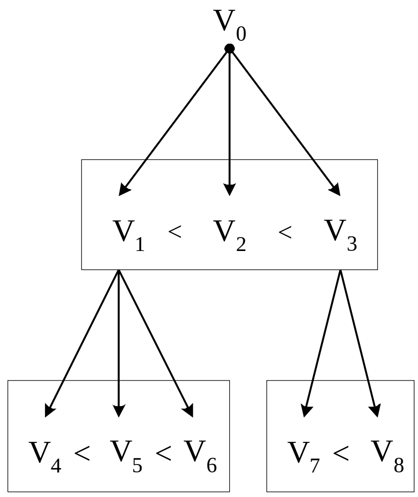
Zīm. 3.40. - orientētu koku piemēri.

Orientēta koka (orkoka) virsotni ar negatīvo pakāpi 0 sauksim par *lapu*. Ķēdi no saknes līdz lapai sauksim par *zaru*. Par orkoka *augstumu* sauksim maksimālā zara garumu (šķautņu skaitu). Par virsotnes *līmeni* sauksim šo virsotni un sakni savienojošās ķēdes garumu. Viena līmeņa virsotņu kopu sauksim par *paaudzi*. Par orkoka *platumu* sauksim maksimālo virsotņu skaitu vienā paaudzē. Virsotni, kas nav lapa, sauksim par *iekšēju virsotni*.

Virsotņu kopu, uz kurām iet ķēdes (šķautnes) no kādas fiksētas virsotnes v, sauksim par v *pēctečiem (dēliem)* un v sauksim par šīs kopas *tēvu (senci)*.

Katra līmeņa virsotņu kopā var definēt pilnu sakārtojumu, kurā vismazākais elements parasti tiek zīmēts kreisajā malā un vislielākais – labajā.

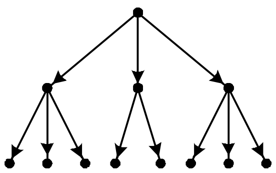
Orientētu koku sauksim par *sakārtotu koku*, ja katras virsotnes dēlu kopā ir definēts pilns sakārtojums.



Zīm. 3.41. - sakārtota koka piemērs.

Var redzēt, ka pilns sakārtojums katras virsotne dēlu kopā inducē pilnu sakārtojumu viena līmeņa virsotņu kopā.

Par *m-āru koku* sauksim sakārtotu koku, kurā katrai virsotnei ir ne vairāk kā m dēli.



Zīm. 3.42. - 3-āra koka piemērs.

Binārais koks ir orientēts koks, kurā katrai virsotnei ir ne vairāk kā 2 dēli, un katrā dēlu kopā ir dota funkcija uz divu elementu kopu {kreisais (jaunākais), labais (vecākais)} (citiem vārdiem sakot, ir noteikts, kāds dēls ir kreisais (jaunākais) un kāds – labais (vecākais)). Tādējādi binārs koks ir 2-ārs koks ar papildus struktūru.

Par binārа koka virsotnes *apakškoku* sauksim visu tās pēcteču veidoto koku (ieskaitot pašu virsotni). Par binārа koka virsotnes *kreiso (labo) apakškoku* sauksim tās kreisā (labā) dēla apakškoku.

Par *pilnu* bināru koku sauksim bināru koku, kurā katrai virsotnei ir nulle vai divi dēli. Parasti bināros kokus attēlo ar neorientētām šķautnēm un pēc noklusēšanas uzskata, ka šķautnes ir orientētas no augšas uz apakšu.

(a) *(b)*

Zīm. 3.43. – bināru koku piemēri.

Bināros kokus var definēt arī *rekursīvā veidā*. No sākuma definēsim, ka jebkurš orientēts koks ar vienu virsotni ir binārs koks. Tālāk definēsim, ka katrs binārs koks satur sakni, kreiso apakšzaru un labo apakšzaru, katrs no kuriem ir binārs koks.

KOKU SKAITĪŠANA

Šajā nodaļā apskatīsim vienkāršākos kombinatorikas uzdevumus, kas ir saistīti ar dažādām koku klasēm. Risinot koku skaitīšanas uzdevumus, katrā gadījumā ir jāsaprot, ko nozīmē termins “dažādi koki”. Parasti kokus identificē, izmantojot kādu izomorfisma paveidu. Strādājot ar orientētiem kokiem, ir atbilstoši jāmaina izomorfisma jēdziens: ja orientētam kokam tiek papildus definētas kādas struktūras (piemēram, virsotnes dēlu kopas pilns sakārtojums), tad pareizs šādu koku izomorfisms ir tāda bijektīva virsotņu kopas funkcija sevī, kas saglabā visas papildstruktūras. Atslēgas frāze, ar kura palīdzību bieži vien iekodē koku izomorfisma klašu skaitīšanu, ir termins “koki ar neiezīmētām virsotnēm”.

TEORĒMA 3.22. *(Cayley, Joyal)* (Neorientētu) koku ar n iezīmētām virsotnēm skaits ar n^{n-2}.
PIERĀDĪJUMS Teorēmas pierādījuma ideja balstās uz funkcijas pierakstu orientēta grafa veidā.

Katrai galīgai kopai eksistē savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp šīs kopas permutāciju kopu un uz kopas elementiem kā virsotnēm definētu virzītu ciklu apvienojumu kopu, sakarā ar to, ka katru permutāciju var savstarpēji viennozīmīgi sadalīt tās neatkarīgajos ciklos, katru no kuriem var domāt kā virzītu ciklu.

Fiksēsim skaitāmo koku virsotņu kopu V={1,...,n}.

Apskatīsim V endofunkcijas (funkcijas sevī). Šādu funkciju skaits ir vienāds ar n^n un katrai funkcijai $f:V\to V$ var piekārtot orientētu grafu $\Gamma(f)$ ar virsotņu kopu V, kuram šķautnes ir formā $i\to f(i)$.

Katrai orientēta grafa $\Gamma(f)$ vājās sakarības komponentei var piekārtot virzītu ciklu, kura virsotnes ir orientēti koki. Tātad, saskaņā ar viennozīmīgo atbilstību starp kopas permutācijām un virzītu ciklu apvienojumiem, kopas V kā virsotņu kopas veidotu orientētu koku permutāciju skaits ir vienāds ar n^n.

Apzīmēsim visu kopas V kā virsotņu kopas veidotu orientētu koku permutāciju kopu ar Z(V) un apzīmēsim visu kopas V kā virsotņu kopas veidotu koku kopu ar T(V).

Definēsim funkciju $j : V \times V \times T(V) \to Z(V)$ šādā veidā. Katram trijniekam (v,w,t) apskatīsim vienkāršo ķēdi p kokā t, kas savieno virsotnes v un w, izdzēsīsim ķēdes p šķautnes, katru atlikušo koku orientēsim uzskatot p virsotnes par saknēm. Šādas operācijas rezultātā trijniekam (v,w,t) piekārtosim orientētu koku virkni $j(v,w,t)$.

Funkcija j ir bijektīva, tāpēc $|V \times V \times T(V)| = |Z(V)|$ un $n^2 |T(V)| = n^n$. Iegūstam, ka visu koku skaits ar n virsotnēm $|T(V)|$ ir vienāds ar n^{n-2}. *QED*

TEORĒMA 3.23. Bināru koku ar n virsotnēm skaits ir vienāds ar Katalāna skaitli C_{n+1}.

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim bināru koku skaitu ar n virsotnēm ar b_{n+1}. Pietiek ar to, ka mēs pierādām, ka šo skaitļu virkne apmierina Katalāna virknei atbilstošo rekurento sakarību. Binārs koks ar n-1 virsotni satur sakni, kreiso apakškoku un labo apakškoku. Apakškoki var būt arī tukši. Ja kreisajā apakšzarā ir k-1 virsotnes ($1 \le k \le n-1$), tad labajā apakškokā ir n-1-k virsotnes. Kreisais un labais apakškoki var tikt konstruēti neatkarīgi viens no otra, tātad izmantojot reizināšanas likumu redzam, ka kopējais variantu skaits ir $b_k b_{n-k}$. Izmantojot summas likumu iegūstam rekurentu sakarību

$$b_n = b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + b_3 b_{n-3} + \ldots + b_{n-1} b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_i b_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} b_i b_{n-i},$$

kas ir Katalāna virknes rekurentā sakarība (skatīt šīs grāmatas atbilstošo nodaļu). *QED*

CIKLI

IEVADS

Vispārīgā gadījumā grafs var stipri atšķirties no koka – tajā var būt apakšgafi, kas ir izomorfi cikliem. Tātad ciklu skaits un izvietojums raksturo to, cik stipri grafs atšķiras no koka. Var pierādīt, piemēram, ka grafs ir 2-sakarīgs tad un tikai tad, ja to var iegūt no cikla, pēctecīgi pievienojot jau izveidotajam grafam ķēdes, kas savieno dažādas virsotnes. Šajā apakšnodaļā apskatīsim tikai sakarīgus grafus.

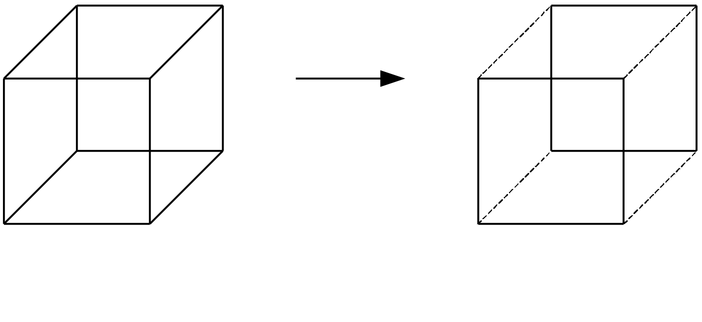
Atgādināsim, ka mēs definējām ciklu kā maršrutu, kura pirmā virsotne sakrīt ar pēdējo un vienkāršu ciklu kā ciklu, kurā visas virsotnes ir dažādas. Sakarā ar to, ka mūs galvenokārt interesēs grafa apakšgrafi, kas ir izomorfi cikliem, tad par ciklu šajā nodaļā mēs domāsim kā par tā šķautņu kopu. Ievērosim, ka šī atbilstība nav savstarpēji viennozīmīga –

vairākiem cikliem un pat vairākiem vienkāršiem cikliem atbilst viena šķautņu kopa. Tādējādi ir lietderīgi modificēt cikla jēdzienu tā, lai tas atbilstu prasībai, ka tā katra virsotne var būt cikliska maršruta sastāvdaļa. Grafa $\Gamma=(V,E)$ apakšgrafu $\Gamma'=(V',E')$ šajā nodaļā sauksim par ciklu, ja tā katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

Par grafa *ciklu matricu* sauksim bināru matricu, kuras rindas tiek indeksētas ar grafa vienkāršajiem cikliem (grafa apakšgrafiem, kas ir izomorfi cikliem C_n), kolonnas tiek indeksētas ar šķautnēm un tās elementi ir vienādi ar 1 tad un tikai tad, ja elementam atbilstošā šķautnes pieder elementam atbilstošajam ciklam. Jāpiezīmē, ka grafa ciklu matrica nenosaka viennozīmīga grafa izomorfizma tipu (piemēram, tāpēc, ka grafā var būt tilti).

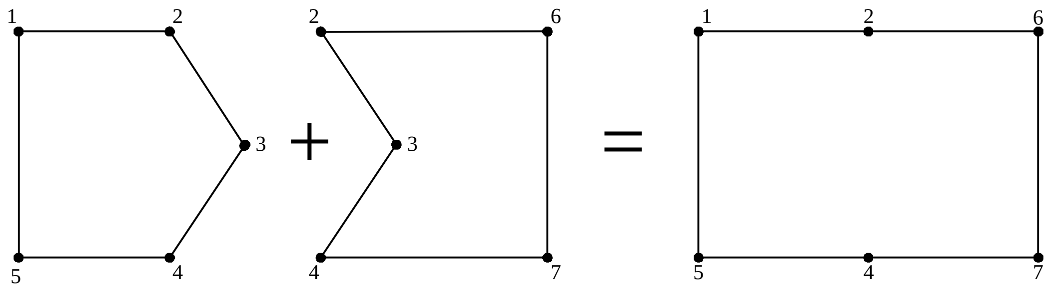
Šķautņu kopas apakškopu sauksim par *griezumu*, ja tās iznīcināšana padara grafu par nesakarīgu. Griezumu sauksim par *minimālu griezumu*, ja nekāda tā apakškopa nav griezums. *Kocikls* ir minimāls griezums. Grafa griezumu matricu definē analoģiski ciklu matricai.

PIEMĒRS



Zīm. 3.46. – minimāls griezums kuba grafā.

Analizējot grafa ciklu īpašības ir lietderīgi pielietot lineāro algebru virs galīgā lauka F_2. Ja ir dots (neorientēts) grafs $\Gamma=(V,E)$, tad par tā *virsotņu telpu* $\Phi(\Gamma)$ sauc lineāru telpu virs lauka F_2, kuras elementi ir virsotņu kopas *V* apakškopas, par *šķautņu telpu* $\Psi(\Gamma)$ sauc lineāru telpu virs lauka F_2, kuras elementi ir šķautņu kopas E apakškopas. Par divu (virsotņu vai šķautņu) kopu M_1, M_2 summu *(summu pēc moduļa 2)* sauc to simetrisko starpību, tādējādi $M_1+M_2=M_1 \Delta M_2$.



Zīm.3.47. – ciklu summas piemērs.

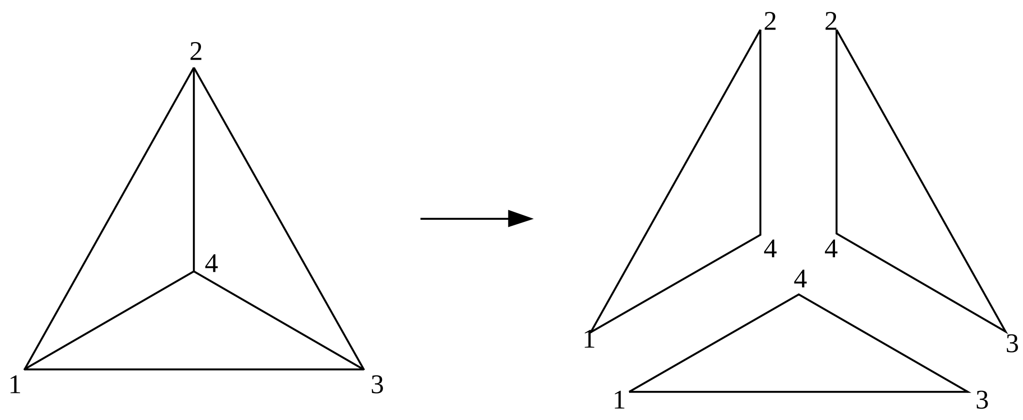
Virsotņu vai šķautņu kopu M sauksim par *atkarīgu/neatkarīgu*, ja tā ir atkarīga/neatkarīga kā lineāras telpas elementu kopa. Cikli un kocikli ir elementi šajās telpās, tāpēc ir jēga interpretēt to kopu atkarīgumu vai neatkarīgumu un apskatīt šo kopu lineārās čaulas. Ciklu (kociklu) kopu $\{z_i\}_{i=1}^n$ sauksim par *neatkarīgu*, ja tā ir lineāri neatkarīga kopa atbilstošajā lineārajā telpā. Tukšu šķautņu kopu uzskatīsim gan par ciklu, gan par kociklu.

TEORĒMA 3.24. Visu ciklu kopa ir lineāra apakštelpā telpā $\Phi(\Gamma)$.

PIERĀDĪJUMS Ir jāpierāda, ka divu ciklu šķautņu kopu simetriskā starpība ir cikla šķautņu kopa. Šis apgalvojums ir acīmredzams, ja diviem dotajiem grafiem nav kopīgu šķautņu. Ja tiem ir kopīgas šķautnes, tad simetriskās starpības rezultātās kopīgās šķautnes anulējas un rezultējošā šķautņu kopa veido jaunu ciklu. *QED*

Analoģisks apgalvojums ir spēkā arī attiecībā uz kocikliem.

Maksimālu neatkarīgu ciklu kopu (vai minimālo ciklu kopu, no kuras ir atkarīgi visi pārējie cikli) sauksim par *fundamentālu ciklu sistēmu* – (tā ir bāze ciklu telpā). Fundamentālas ciklu sistēmas elementus sauksim par *fundamentāliem cikliem*, tās elementu skaitu – par grafa *ciklisko rangu* vai *ciklomātisko skaitli*.



Zīm.3.48. – fundamentālu ciklu sistēmas piemērs.

Maksimālu neatkarīgu kociklu kopu (vai minimālo kociklu kopu, no kuriem ir atkarīgi visi pārējie kocikli) sauksim par *fundamentālu kociklu sistēmu* (tā ir bāze kociklu telpā), tās elementus – par *fundamentāliem kocikliem*, tās elementu skaitu – par grafa *kociklisko rangu* vai *kociklomātisko skaitli*, $m^*(\Gamma)$.

Pieņemsim, ka $S=(V,E_T)$ ir grafa skelets. Par šim skeletam atbilstošo *koskeletu* sauksim grafu $S^*=(V,E\setminus E_T)$. Koskeleta šķautnes sauksim par *hordām*.

TEORĒMA 3.25. Ja Γ ir saistīts grafs, tad m=E-V+1 un $m^*=V-1$.

PIERĀDĪJUMS Apskatīsim jebkuru grafa Γ skeletu S. Katra koskeleta S^* horda e rada tieši vienu ciklu Z_e, apvienojot e ar vienīgo ķēdi kokā S, kas savieno e galapunktus. Visi cikli Z_e ir neatkarīgi, jo katrs satur savu hordu. Pierādīsim, ka katrs cikls grafā Γ ir atkarīgs no ciklu sistēmas $\{Z_e\}_{e\in E(S^*)}$, citiem vārdiem sakot, tas var tikt izteikts kā šo ciklu lineāra kombinācija. Apskatīsim kādu ciklu $Z\neq Z_e$. Pieņemsim, ka Z satur šķautnes $e_1,...,e_k$ no kopas $E(S^*)$. Tādas šķautnes obligāti eksistē, jo pretējā gadījumā Z ir koka S apakšgrafs, kas nevar saturēt ciklus.

Izmantosim matemātisko indukciju pēc k. Indukcijas bāze: ja k=1, tad Z ir kopā $\{Z_e\}_{e\in E(S^*)}$. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess visiem m<k: $Z=Z_{e_1}+Z_{e_2}+...+Z_{e_m}$, visiem Z ar hordu skaitu m<k. Apskatīsim ciklu Z ar hordām $e_1,...,e_k$.

Konstruēsim ciklu $Z' = (Z \setminus \{e_k\}) \cup (Z_{e_k} \setminus \{e_k\})$ (tas var iet pa kādu šķautni vairākas reizes). Z' satur k-1 hordu, tāpēc $Z' = Z_{e_1} + ... + Z_{e_{k-1}}$. Iegūstam, ka

$$Z' + Z_{e_k} = (Z \setminus \{e_k\}) \cup ((Z_{e_k} \setminus \{e_k\}) \oplus Z_{e_k}) = Z,$$

tātad indukcijas pāreja ir pierādīta. Otru teorēmas daļu pierāda līdzīgi. *QED*

Praktiski fundamentālos ciklus var atrast šādā veidā. No sākuma konstruēsim grafa skeletu. Tā kā katra horda kopā ar skeletu nosaka tieši vienu fundamentālu ciklu, tad pievienosim skeletam pa vienai hordai un savilksim tās šķautnes, kas nepiedalās hordas veidotajā vienīgajā ciklā.

TEORĒMA 3.26. *(Kēniga teorēma)* Grafs ir divdaļīgs tad un tikai tad, ja tas nesatur ciklus, kuru garums ir nepāra skaitlis.
PIERĀDĪJUMS Neierobežot vispārību uzskatīsim, ka grafs ir sakarīgs.

Pieņemsim, ka grafs ir divdaļīgs un satur nepāra garuma ciklu.

Fiksēsim kādu grafa virsotņu sadalījumu, kas apmierina divdaļības īpašību un ievērosim, ka nepāra garuma cikla vismaz divām virsotnēm ir jāpieder vienai virsotņu sadalījuma kopai, tātad ir iegūta pretruna.

Otrādi, pieņemsim, ka grafs nesatur nepāra garuma ciklus, pierādīsim, ka grafs ir divdaļīgs.

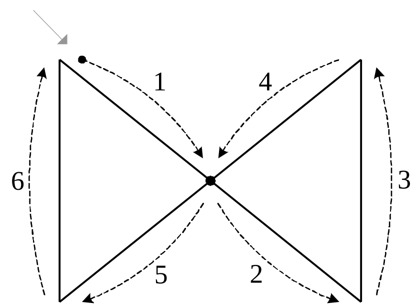
Fiksēsim kādu grafa virsotni v un definēsim virsotņu kopas sadalījumu $V(\Gamma)=A\cup B$ šādā veidā: kopā A liksim virsotnes, kurām attālums līdz v ir pāra skaitlis (ieskaitot arī v) un kopā B liksim virsotnes, kurām attālums līdz v ir nepāra skaitlis. Pierādīsim, ka nav šķautņu starp vienas apakškopas virsotnēm. Pieņemsim pretējo: eksistē divas virsotnes u un w, kas atrodas vienā kopā (A vai B) un kas ir saistītas. Neviena no šīm virsotnēm nevar būt vienāda ar v. Pieņemsim, ka P_u ir īsākā (v,u)-ķēde un P_w ir īsākā (w,v)-ķēde. Ievērosim, ka šo ķēžu garumu summa ir pāra skaitlis. Savienojot P_u, šķautni (u,w) un P_w iegūsim ciklu, kura garums ir nepāra skaitlis, kas ir pretruna. *QED*

EILERA UN HAMILTONA CIKLI

Eilera cikli

Par grafa *Eilera ciklu* sauksim ciklu, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi. Par grafa *Eilera ķēdi* sauksim ķēdi, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi. Ja grafā eksistē Eilera cikls, tad to sauksim par *Eilera grafu.* Par orientēta grafa Eilera ciklu sauksim orientētu ciklu, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi. 18.gs vidū pateicoties L. Eilera darbiem matemātikas popularizēšanā (skat. uzdevumu par Kēnigsbergas tiltiem) matemātiķu vidū radās interese par Eilera cikliem.

PIEMĒRS



Zīm. 3.49. - Eilera cikla piemērs.

TEORĒMA 3.27. Ja grafs Γ ir sakarīgs un netriviāls, tad sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ ir Eilera grafs;
2) katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis;
3) Γ šķautņu kopu var sadalīt ciklu apvienojumā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim šo teorēmu ar cikla palīdzību.

$1 \to 2$ Katrā virsotnē Eilera cikls ieiet un iziet vienādu skaitu reižu, tāpēc katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

$2 \to 3$ Γ ir sakarīgs un netriviāls grafs, tāpēc katras virsotnes pakāpe ir pozitīva un $2E = \sum d(v) \geq 2V$, tātad E>V-1 un Γ satur vismaz vienu ciklu Z_1. $\Gamma - Z_1$ ir skeletāls apakšgrafs, kura visu virsotņu pakāpes ir pāra skaitļi (ignorējam izolētas virsotnes). $\Gamma - Z_1$ apmierina tos pašus nosacījumus, tāpēc eksistē cikls, kuru izmetam ārā, u.t.t. Beigās iegūsim tukšo grafu.

$3 \to 1$ No vienkāršajiem cikliem pakāpeniski konstruējam lielo Eilera ciklu izmantojot faktu, ka divu ciklu šķautņu kopu simetriskā starpība ir cikls. *QED*

Apzīmēsim ar G(n) – dažādu grafu kopu ar n virsotnēm, E(n) – Eilera grafu kopu ar n virsotnēm.

TEORĒMA 3.28 $\lim_{n\to\infty} \frac{|E(n)|}{|G(n)|} = 0$ (Eilera grafu "gandrīz nav")

PIERĀDĪJUMS Šajā pierādījumā uzskatīsim, ka grafam ar n virsotnēm virsotņu kopa ir {1,...,n}.

Tā kā grafu ar n virsotnēm pilnībā nosaka tā šķautņu kopa, kas ir apakškopa šķautņu kopas universā ar C_n^2 elementiem, tad

$$|G(n)| = 2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Apzīmēsim ar F(n) visu tādu grafu kopu ar n virsotnēm, kuriem katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis. Redzam, ka $|E(n)| \le |F(n)|$. Definēsim funkciju $j : G(n-1) \to F(n)$ šādā veidā. Katram grafam Γ ar n-1 virsotni piekārtosim grafu no kopas F(n), kurš atšķiras no Γ ar vienu (n-to) virsotni, kura ir savienota ar tām Γ virsotnēm, kurām ir nepāra pakāpe. Tā kā katram grafam virsotņu skaits ar nepāra pakāpem ir pāra skaitlis, tad funkcija j ir korekti definēta. Var redzēt, ka funkcija j ir sirjektīva, tāpēc $|F(n)| \le |G(n-1)|$. Aprēķināsim robežu:

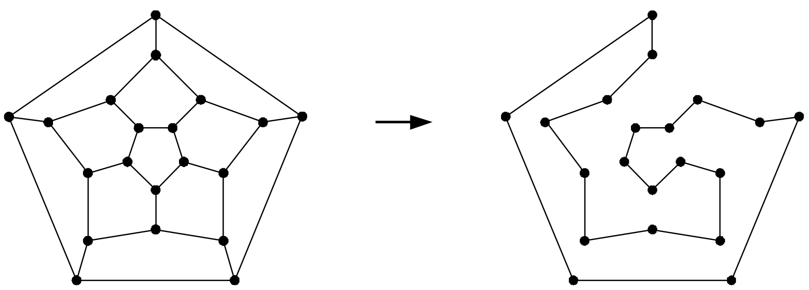
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E(n)|}{|G(n)|} \le \lim_{n\to\infty} \frac{|G(n-1)|}{|G(n)|} = \lim_{n\to\infty} 2^{-(n-1)} = 0,$$

tātad $\lim_{n\to\infty}\frac{|E(n)|}{|G(n)|}=0$. *QED*

Hamiltona cikli

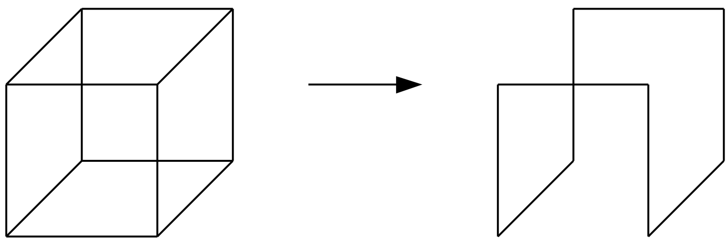
Par grafa *Hamiltona ciklu* sauksim ciklu, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi. Par grafa *Hamiltona ķēdi* sauksim ķēdi, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi. Ja grafā eksistē Hamiltona cikls, tad to sauksim par *Hamiltona grafu.* Par *orientētu Hamiltona ciklu* sauksim orientētu ciklu, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

Par Hamiltona ciklu teorijas sākumu tiek uzskatīts īru matemātiķa V.Hamiltona uzdevums par dodekaedra grafa virsotņu apiešanu tā, lai katra virsotne tiek atzīmēta tieši vienu reizi. Var pierādīt, ka Hamiltona uzdevumam ir viens atrisinājums ar precizitāti līdz grafa automorfizmam:



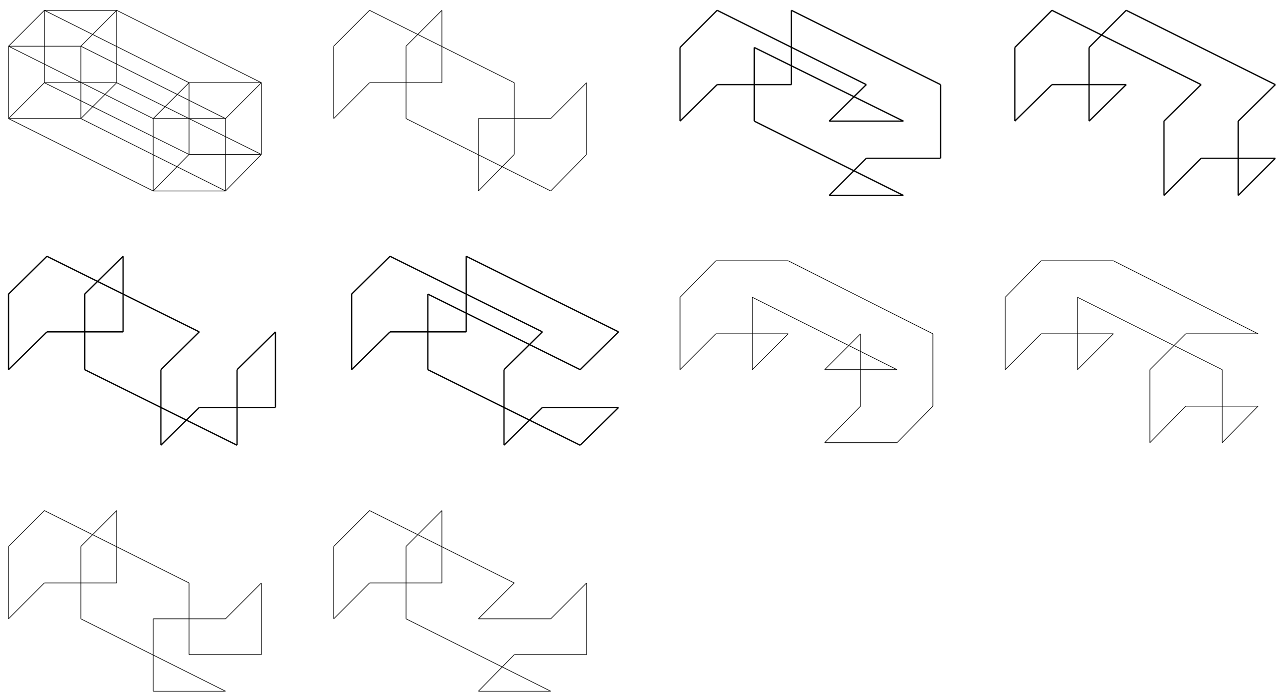
Zīm. 3.50. - Hamiltona cikls dodekaedra grafā.

Kuba grafam H_3 arī ir viens Hamiltona cikls ar precizitāti līdz automorfizmam:



Zīm. 3.51. - Hamiltona cikls kuba grafā.

Savukārt hiperkubam H_4 ir 9 Hamiltona ciklu klases:



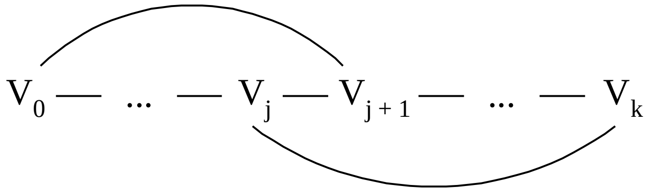
Zīm. 3.52. - grafa H_4 Hamiltona ciklu klases.

Viegli redzēt, ka Hamiltona grafam nevar būt šarnīru, tātad Hamiltona grafs ir 2-sakarīgs. Šim vienkāršajam novērojumam ir vispārinājums: ja Γ ir Hamiltona grafs un $U \subseteq V(\Gamma)$, tad grafam $\Gamma - U$ ir ne vairāk kā |U| komponentes. Grafu, ka apmierina šādu nosacījumu, sauc par *stingru* grafu.

Nākamā teorēma rāda, ka grafs ir Hamiltona grafs, ja virsotņu pakāpes ir pietiekoši lielas.

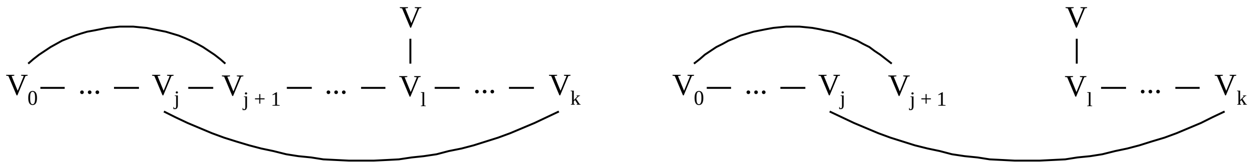
TEORĒMA 3.29. Ja grafam Γ izpildās nosacījumi $V \geq 3$ un $d \geq \frac{V}{2}$, tad Γ ir Hamiltona grafs.

PIERĀDĪJUMS Γ ir sakarīgs, jo pretējā gadījumā mazākajā komponentē virsotņu pakāpes būtu lielākas nekā komponentes virsotņu skaits. Pieņemsim, ka virsotņu virkne $K = (v_0, ..., v_k)$ ir garākā ķēde grafā Γ. No ķēdes maksimalitātes seko, ka visas virsotnes, kas ir saistītas ar v_0 vai v_k pieder virknei K, tātad vismaz $\frac{V}{2}$ no virsotnēm $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$ ir saistītas ar v_k un vismaz $\frac{V}{2}$ virsotnēm $v_i \in \{v_1, ..., v_{k-1}\}$ piemīt šāda īpašība: v_{i+1} un v_0 ir saistītas. No Dirihlē principa seko, ka eksistē virsotne v_j, kas apmierina abus nosacījumus:



Zīm. 3.53.

Var redzēt, ka virsotņu virkne $H = (v_0, v_{j+1}, v_{j+2}, ..., v_k, v_j, v_{j-1}, ..., v_0)$ ir Hamiltona cikls tāpēc, ka pretējā gadījumā šis cikls varētu tikt pārveidots par ķēdi, kuras garums ir lielāks nekā ķēdes K garums, pievienojot šim ciklam ar vienas šķautnes palīdzību kādu no kopas $V(\Gamma) \setminus \{v_0, ..., v_k\}$ virsotnēm, vismaz viena šāda šķautne (v_l, v) eksistē tā kā grafs Γ ir sakarīgs (skatīt Zīm. (b))

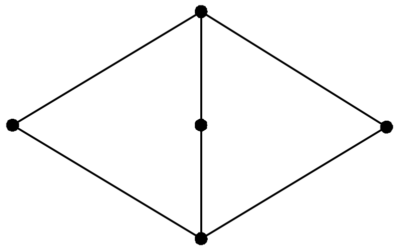


(a) *(b)*

Zīm. 3.54.

QED

Grafu sauc par *teta-grafu*, ja to var iegūt no grafa $K_{2,3}$ pielietojot dažas šķautņu sadalīšanas operācijas, nosaukums ir saistīts ar to, ka teta-grafs izskatās, kā grieķu alfabēta burts q :



Zīm. 3.57. - teta-grafs.

Var pierādīt, ka, ja grafs nav Hamiltona grafs un ir „pietiekoši" sakarīgs, tad tas satur apakšgrafu, kas ir teta-grafs.

TEORĒMA 3.31. Ja grafs ir 2-sakarīgs un nav Hamiltona grafs, tad tas satur apakšgrafu, kas ir teta grafs.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka C ir maksimāls cikls, pēc pieņēmuma C nesatur visas grafa virsotnes. Var pārbaudīt, ka visi 2-sakarīgi grafi ar ne vairāk kā 4 virsotnēm ir Hamiltona grafs, tātad $V \geq 5$. Ja grafs ir 2-sakarīgs un satur vismaz 5 virsotnes, tad tā maksimālais cikls nevar saturēt 3 virsotnes. Tā kā grafs ir 2-sakarīgs, tad eksistē virsotne v ārpus C un divas virsotņu šķirtas ķēdes no v līdz C. Šo divu ķēžu galapunkti nevar būt savienoti ciklā C, jo pretējā gadījumā mēs iegūtu garāku ķēdi. Apvienojot C un šīs divas ķēdes iegūsim teta grafu.

QED

Hamiltona cikla meklēšanu var reducēt uz kliķes skaitļa atrašanu šādā veidā. Definēsim divu grafu *Vizinga reizinājumu*. Ja doti divi grafi $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$ ar nosacījumu $|V| \geq |V'|$, tad to Vizinga reizinājums ir grafs $\Gamma \Diamond \Gamma' = (V \times V', F)$, kur šķautņu kopa F tiek definēta šādi:

1) divas virsotnes (v_1, v_1') un (v_2, v_2') netiek savienotas, ja $v_1 = v_2$ vai $v_1' = v_2'$;
2) ja $v_1 \neq v_2$ un $v_1' \neq v_2'$, tad virsotnes (v_1, v_1') un (v_2, v_2') tiek savienotas tad un tikai tad, ja $(v_1, v_2) \in E$ un $(v_1', v_2') \in E'$, vai arī $(v_1, v_2) \notin E$ un $(v_1', v_2') \notin E'$.

Var redzēt, ka $a(\Gamma \Diamond \Gamma') \leq \min(|V|, |V'|) = |V'|$, tāpēc ka nekāda kliķe nevar saturēt divas virsotnes ar vienādu pirmo vai otro koordināti.

TEORĒMA 3.32. $a(\Gamma \Diamond \Gamma') = |V'|$ tad un tikai tad, ja Γ satur apakšgrafu, kas ir izomorfs grafam Γ'.

PIERĀDĪJUMS Vienkāršības dēļ pieņemsim, ka V={1,..,n} un V'={1,...,m}.

Pieņemsim, ka Γ satur apakšgrafu $\Gamma'' = (V'', E'')$, kas ir izomorfs grafam Γ', un šis izomorfisms $f : V' \to V''$ ir tāds, ka $f(1) = i_1, ..., f(m) = i_m$. Pierādīsim, ka grafa $\Gamma \Diamond \Gamma'$ inducētais apakšgrafs ar virsotņu kopu $U = \{(i_1, 1), (i_2, 2), ..., (i_m, m)\}$ ir pilns. Ja $(u', v') \in E'$, tad $(i_{u'}, i_{v'}) \in E$ un otrādi, ja $(u', v') \notin E'$, tad $(i_{u'}, i_{v'}) \notin E$. Tādējādi redzam, ka jebkuras divas virsotnes no kopas U ir savienotas.

Pieņemsim, ka grafs $\Gamma \Diamond \Gamma'$ satur kliķi (pilnu inducētu apakšgrafu) ar virsotņu kopu $W = \{(j_1,1),(j_2,2),...,(j_m,m)\}$. Tad funkcija $f : V' \to V''$, kas definēta ar nosacījumu $f(k) = j_k$ ir grafu izomorfisms. QED

Hamiltona cikla meklēšana ir grūts uzdevums, nav zināmi algoritmi, izņemot visu variantu pārmeklēšanu. Praktiski Hamiltona ciklus meklē izmantojot meklēšanu ar atkāpšanos (bektrekingu) un *heiristiskus* algoritmus.

Apzīmēsim ar H(n) visu Hamiltona grafu skaitu ar n virsotnēm. Var pierādīt, ka $\lim_{n\to\infty} \frac{H(n)}{G(n)} = 1$ ("gandrīz visi" grafi ir Hamiltona grafi).