OPERĀCIJAS AR GRAFIEM

Tāpat kā kopu teorijā, arī grafu teorijā bieži rodas nepieciešamība veidot jaunus grafus no jau uzdotiem.

Apskatīsim dažas operācijas ar grafiem:

1) *Papildināšana:* šī operācija jau tika definēta,

2) *Apvienošana:* ja doti 2 grafi $\Gamma=(V,E)$ un $\Gamma'=(V',E')$, tad par to *apvienojumu* sauksim grafu $\Gamma\cup\Gamma'=(V\cup V',E\cup E')$ (piemēram, var redzēt, ka katrs grafs ir tā komponenšu apvienojums),

3) *Savienošana:* ja doti 2 grafi $\Gamma=(V,E)$ un $\Gamma'=(V',E')$, tad par to *savienojumu* sauksim grafu $\Gamma+\Gamma'=(V\cup V',E\cup E'\cup E^{*})$, kur

$$E^{*}=(V\times V')\cup(V'\times V),$$

4) *Virsotnes (virsotņu kopas) izdzēšana:* tiek izdzēsta virsotne (virsotņu kopa) un visas tai incidentās šķautnes, virsotņu kopas U izndzēšanu grafā $\Gamma=(V,E)$ apzīmēsim ar $\Gamma-U$, tādējādi $\Gamma-U=(V\setminus U,E\setminus\{(u,v),(v,u)\,|\,u\in U\})$,

5) *Šķautnes (šķautņu kopas) izdzēšana:* tiek izdzēsta šķautne vai šķautņu kopa, šķautņu kopas S izdzēšanu grafā $\Gamma=(V,E)$ apzīmēsim ar $\Gamma-S$, tādējādi $\Gamma-S=(V,E\setminus S)$,

6) *Šķautnes savilkšana:* virsotnes, kas incidentas ar doto šķautni, tiek savienotas vienā, šķautnes e savilkšanu grafā Γ apzīmēsim ar Γ/e,

7) *Virsotnes pievienošana:* tiek pievienota viena jauna virsotne un šķautnes, kas to savieno ar visām iepriekš eksistējošām virsotnēm,

8) *Šķautnes pievienošana:* tiek pievienota šķautne, kas savieno divas izvēlētas virsotnes, kas iepriekš nav bijušas savienotas, šķautnes e pievienošanu grafā Γ apzīmēsim ar $\Gamma + e$,

9) *Inducēta apakšgrafa savilkšana:* dotā apakšgrafa vietā pievienojam jaunu virsotni, kas ir savienota ar tām virsotnēm (ārpus) savilktā apakšgrafa virsotnēm, ar kurām ir bijusi savienota vismaz viena no savilktā apakšgrafa virsotnēm. Speciālgadījums – divu virsotņu identifikācija.

Grafu Γ var *savilkt uz grafu* Γ', ja Γ' var iegūt no Γ veicot vairākas šķautņu savilkšanas operācijas. Par grafa Γ *minoru* sauc jebkuru grafu, ko var iegūt no Γ vairkākkārt pielietojot šķautņu izdzēšanas un savilkšanas operācijas.

Minēsim vienu no svarīgākiem neseniem grafu teorijas rezultātiem.

TEORĒMA *(Seimors-Robertsons, 80.gadi)* Jebkurā bezgalīgā grafu kopā eksistē divi grafi, tādi, ka viens no tiem ir otra grafa minors *(šajā bezgalīgajā grafu kopā eksistē divi grafi Γ_1 un Γ_2 tādi, ka vai nu grafs Γ_1 ir izomorfs kādam grafa Γ_2 minoram, vai arī Γ_2 ir izomorfs kādam grafa Γ_1 minoram).*

Minēsim arī vēl vienu no mūsdienu grafu teorijas neatrisinātām problēmām, kas ir saistīta ar tikko definētajām operācijām.

Uzdosim šādu jautājumu - vai grafa izmorfisma tipu var noteikt (rekonstruēt), ja ir zināms viss to grafu izomorfismu tipu saraksts, kurus iegūst, izmetot vienu virsotni (ja grafam ir n virsotnes, tad iegūst n grafus (katrs no tiem ar n-1 virsotni)? Ir izteikta hipotēze (*Rekonstrukcijas Hipotēze*), ka atbilde uz šo jautājumu ir pozitīva.

GRAFU SAKARĪGUMS

IEVADS

Grafs ir *sakarīgs*, ja tā jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi.

Sakarības komponentes ir maksimālie sakarīgie apakšgrafi.

Virsotni sauksim par *šarnīru*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Šķautni sauksim par *tiltu*, ja tās izdzēšana palielina komponenšu skaitu.

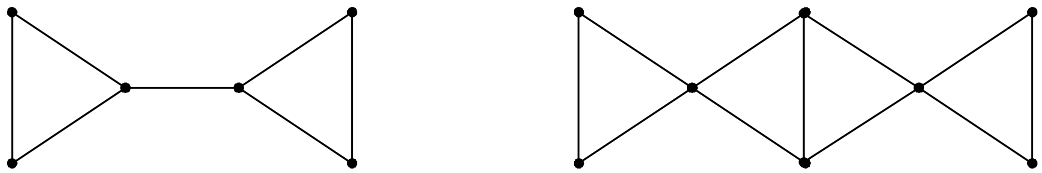
Šķautņu kopas apakškopu sauksim par *griezumu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Grafu sauksim par *bloku*, ja tas ir sakarīgs grafs bez šarnīriem.

Grafa inducētu apakšgrafu sauksim par *apakšbloku*, ja tas ir maksimāls bloks (jebkurš apakšgrafs, kas to satur, nav bloks).

Grafa Γ *apakšbloku grafs* – grafs, kur virsotnes ir Γ bloki, divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja attiecīgie bloki ir savienoti ar šarnīru. Grafa bloku grafs ir tā grafiski iterētais invariants.

PIEMĒRS Zīmējumā 3.32 (a) ir parādīts grafs ar diviem šarnīriem un vienu tiltu. Zīmējumā 3.32 (b) ir parādīts grafs ar trīs blokiem.



(a) *(b)*

Zīm.3.32. (a) - grafs ar diviem šarnīriem un vienu tiltu, (b) – grafs ar diviem šarnīriem, trīs apakšblokiem un bez tiltiem.

TEORĒMA 3.6 Jebkurā grafā ir vismaz 2 virsotnes, kas nav šarnīri.
PIERĀDĪJUMS Nevienas diametrālas ķēdes gali nevar būt šarnīri. *QED*

TEORĒMA 3.7 Ja V ir grafa virsotņu skaits, E ir grafa šķautņu skaits un E ir grafa komponenšu skaits, tad ir spēkā divkārša nevienādība

$$V - C \le E \le \frac{(V-C)(V-C+1)}{2} \qquad (3.3)$$

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka $V - C \le E$.

Izmantosim matemātisko indukciju pēc virsotņu skaita.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visiem V<k. Apskatīsim jebkuru grafu Γ ar virsotņu skaitu V=k. Iznīcināsim jebkuru virsotni v grafā Γ, kas nav šarnīrs. Ja d(v)=0, tad jaunajā grafā Γ' iegūsim, ka V'=V-1,C'=C-1,E"=E, un izpildās nevienādība $V - C \le E$, ja tā ir spēkā grafam Γ'. Ja d(v)>0, tad V"=V-1,C'=C,E'=E-d(v), un arī šajā gadījumā nevienādība saglabājas.

Tagad pierādīsim, ka $E \le \frac{(V-C)(V-C+1)}{2}$. Uzskatīsim grafa virsotņu un komponenšu skaitu par fiksētu un apskatīsim tikai grafus, kuru visas komponentes ir pilni grafi, jo citiem grafiem ar fiksētu virsotņu un komponenšu skaitu šķautņu skaits ir vēl mazāks. Ja mēs pierādīsim apgalvojumu pilno grafu apvienojumiem, tad tas būs pierādīts visiem grafiem, jo nevienādības kreisā puse būs vēl mazāka. Pierādīsim, ka vislielākais šķautņu skaits ir grafam, kas satur C-1 K_1 tipa grafu un vienu K_{V-C+1} tipa grafu. Pieņemsim, ka grafā ir divas komponentes $\Gamma_1 \cong K_{V_1}$ un $\Gamma_2 \cong K_{V_2}$, $1 < V_1 \le V_2$. "Pārnesot" vienu virsotni no Γ_1 uz Γ_2 kopējais šķautņu skaits izmainīsies par lielumu $V_2 - (V_1 - 1) = V_2 - V_1 + 1 > 0$, tātad vairākkārtīgi veicot šādas operācijas, mēs palielināsim šķautņu skaitu, pēdējā solī iegūsim grafu, kas satur vienu netriviālu pilnu grafu un vairākas izolētas virsotnes. Grafam $K_{V-C+1} \cup \bigcup_{i=1}^{C-1} K_1$ šķautņu skaits ir vienāds ar $\frac{(V-C)(V-C+1)}{2}$ un līdz ar to teorēma ir pierādīta. *QED*

Analizējot pierādīto nevienādību, var iegūt secinājumu, kas raksturo saistīta grafa virsotņu, šķautņu un komponenšu skaitu:

SECINĀJUMS 3.8. Ja $E > \frac{(V-2)(V-1)}{2}$, tad grafs ir sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka funkcija

$$f(V,C) = \frac{(V-C)(V-C+1)}{2} = V^2 + V(1-2C) + C^2 - C$$

ir dilstoša kā funkcija no C, ja virsotņu skaits V ir fiksēts un C>1. Pierādīsim, ka visiem grafiem

$$f(V,C) > f(V,C+1).$$

Tiešām,

$$f(V,C) - f(V,C+1) = (2V-C)(C-1) > 0,$$

tāpēc, ka katra grafa komponente satur vismaz vienu virsotni un, tādējādi $2V - C > 0$. Ja C>1 un $E > \frac{(V-2)(V-1)}{2}$, tad $E > \frac{(V-C)(V-C+1)}{2}$, kas ir pretrunā ar teorēmu. *QED*

Formulēsim trīs vienkāršas teorēmas, kas raksturo šarnīru, tiltu un bloku īpašības.

TEORĒMA 3.9. *(teorēma par šarnīriem)* $\Gamma = (V, E)$ - saistīts grafs, v- virsotne grafā Γ. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) v ir šarnīrs;

2) eksistē divas virsotnes u un w, atšķirīgas no v, tādas, ka v pieder jebkurai (u,w)-ķēdei;

3) eksistē kopas V\{v} sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ virsotne v pieder jebkurai (u,w)-ķēdei.

PIERĀDĪJUMS Teorēmas pierādījums nav grūts un tiek atstāts lasītāja ziņā. *QED*

TEORĒMA 3.10. *(teorēma par tiltiem)* $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs. e - šķautne grafā Γ. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) e ir tilts;

2) e nepieder nekādam ciklam grafā Γ;

3) eksistē divas virsotnes u un w, tādas, ka e pieder jebkurai (u,w)-ķēdei;

4) eksistē kopas V sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ šķautne e pieder jebkurai (u,w)-ķēdei.

PIERĀDĪJUMS Teorēmas pierādījums nav grūts un tiek atstāts lasītāja ziņā. *QED*

TEORĒMA 3.11. *(teorēma par blokiem)* $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs ar vismaz 3 virsotnēm. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ ir bloks;
2) caur jebkurām divām virsotnēm var novilkt ciklu;
3) caur jebkuru virsotni un jebkuru šķautni var novilkt ciklu;

PIERĀDĪJUMS Teorēmas pierādījums nav grūts un tiek atstāts lasītāja ziņā. *QED*

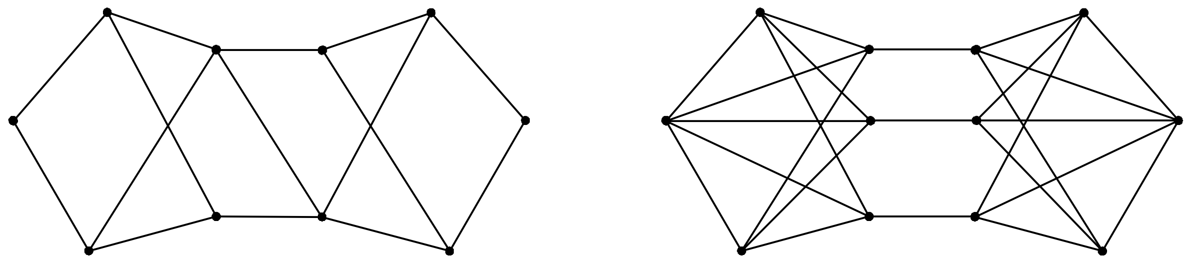
AUGSTĀKU KĀRTU SAKARĪGUMS

Apzīmēsim ar $k(\Gamma)$ mazāko virsotņu skaits, kuru iznīcināšana padara grafu par nesakarīgu vai triviālu (triviāls grafs – grafs, kas satur vienu virsotni), ar $l(\Gamma)$ - mazāko šķautņu skaitu, kuru iznīcināšana padara grafu par nesakarīgu vai triviālu.

Grafu Γ sauksim par *k-sakarīgu grafu*, ja $k(\Gamma) \geq k$, citiem vārdiem sakot, k-sakarīgu grafu nevar padarīt par nesakarīgu vai triviālu iznīcinot mazāk kā k virsotnes.

Grafa *k-sakarīgā komponente* – maksimāls k-sakarīgs apakšgrafs.

Var redzēt, ka nesakarīgi grafi ir 0-sakarīgi. Ja grafs ir sakarīgs, tad $k > 0$. Bloks ir grafs, kuram $k > 1$.



(a) (b)

Zīm.3.33. – 2-sakarīga un 3-sakarīga grafa piemēri.

TEORĒMA 3.12. $k(\Gamma) \leq l(\Gamma) \leq d(\Gamma)$
PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs lasītājam. *QED*

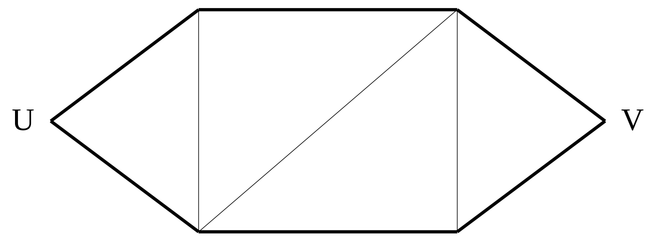
Pieņemsim, ka Γ - sakarīgs grafs, u,v- divas nesavienotas virsotnes. Divas (u,v)-ķēdes sauksim par *virsotņu šķirtām*, ja tām nav kopīgu virsotņu, izņemot u,v.

Ja v ir virsotne un W ir virsotņu kopas apakškopa, tad visu virsotņu šķirtu (u,W)-ķēžu kopu sauksim par *vēdekli*.

Ja ir dotas divas kopas U un V, tad par virsotņu šķirtu (U,V)-ķēdi sauksim virsotņu šķirtu ķēdi, kurai viens galapunkts ir kopā U, bet otrs, kopā V.

Divas (u,v)-ķēdes sauksim par *šķautņu šķirtām*, ja tām nav kopīgu šķautņu.

PIEMĒRI



Zīm. 3.34. – virsotņu šķirtu ķēžu piemērs.

Virsotņu kopa $S \subset V$ *atdala* virsotnes u,v, ja u un v pieder dažādām grafa $\Gamma - S$ komponentēm, šajā gadījumā kopu S sauksim par *atdalošo kopu* attiecībā uz dotajām virsotnēm u un v jeb par (u,v) - atdalošo kopu.

TEORĒMA 3.13. *(Mengera teorēma)* Pieņemsim, ka u un v ir nesavienotas virsotnes grafā. Minimālās (u,v) - atdalošās kopas elementu skaits ir vienāds ar maksimālu virsotņu šķirto (u,v)-ķēžu skaitu.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka Γ - sakarīgs grafs, u,v - divas nesaistītas virsotnes. Pielietosim pastiprināto divparametru matemātisko indukciju pēc virsotņu un šķautņu skaita.

Indukcijas bāze ir apgalvojums grafam, kas satur 3 virsotnes un 2 šķautnes, šajā gadījumā teorēma acīmredzami ir spēkā.

Pieņemsim, ka teorēma ir spēkā visiem grafiem, kuriem vai nu virsotņu skaits ir mazāks kā V vai arī šķautņu skaits ir mazāks kā E. Apskatīsim grafu Γ, kuram ir V virsotnes un E šķautnes, pieņemsim, ka minimālais elementu skaits (u,v) - atdalošā kopā ir n: n=|S|.

Ir iespējami 3 gadījumi, katru no kuriem apskatīsim atsevišķi.

1) Kopā S ir virsotnes, kas nav savienotas ne ar u, ne ar v. Grafs $\Gamma - S$ sastāv no 2 netriviāliem grafiem Γ_1, Γ_2, katrā no kuriem ir vismaz divas virsotnes. Konstruēsim 2 jaunus grafus Γ_u, Γ_v, savelkot grafus Γ_1, Γ_2 uz virsotnēm u un v, attiecīgi. S ir minimālā atdalošā kopa virsotnēm u un v abos grafos Γ_u, Γ_v. Tā kā grafi Γ_1, Γ_2 ir netriviāli, tad Γ_u, Γ_v ir mazāks virsotņu skaits un, saskaņā ar indukcijas pieņēmumu, grafos Γ_u, Γ_v ir n virsotņu-šķirtu kēžu. Apvienojot šīs ķēdes ar ķēdēm no S uz v un no u uz S, iegūsim n virsotņu-šķirtas ķēdes grafā Γ.

2) Visas virsotnes kopā S ir savienotas ar u vai ar v, skaidrības dēļ pieņemsim, ka tās ir savienotas ar u, un eksistē virsotne w kopā S, kas ir savienota arī ar v. Apskatīsim grafu $\Gamma' = \Gamma - w$. Šajā grafā S\{w} ir minimāla (u,v) -atdalošā kopa. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu grafā Γ' ir n-1 virsotņu-šķirtas ķēdes. Apskatīsim vēl ķēdi (u,w,v), tā ir ķēde, kurai nav kopīgu virsotņu ar pārējām ķēdēm. Kopsummā iegūstam n virsotņu-šķirtas ķēdes grafā Γ.

3) Visas virsotnes kopā S ir savienotas ar u vai ar v, skaidrības dēļ pieņemsim, ka tās ir savienotas ar u, un neeksistē virsotne kopā S, kas ir savienota arī ar v. Apskatīsim visīsāko ķēdi, kas savieno u ar v: (u,s,w,...,v), $s \in S, w \neq v$. Redzam, ka $w \notin S$, jo pretējā gadījumā ķēde (u,w,...,v) būtu vēl īsāka. Apskatīsim grafu $\Gamma' = \Gamma / (s, w)$, ko iegūst identificējot virsotnes s,w ar virsotni s. Grafā Γ' kopa

S joprojām ir minimāla atdalošā kopa virsotnēm u un v. Tā kā grafā Γ' ir par vismaz vienu šķautni mazāk, tad tajā ir n virsotņu šķirtas ķēdes. Kēdēm, kam nav kopīgu virsotņu grafā Γ', nav kopīgu virsotņu arī grafā Γ. Tātad grafā Γ ir n virsotņu šķirtas ķēdes. *QED*

Analizējot Mengera teorēmu, iegūsim grafa augstāku kārtu sakarīguma īpašību.

SECINĀJUMS 3.14. Ja grafs ir k-sakarīgs, tad jebkurām divām virsotnēm eksistē k virsotņu šķirtas ķēdes.

Var pierādīt arī šādu Mengera teorēmas vispārinājumu.

TEORĒMA 3.15. Jebkurām divām grafa virsotņu apakškopām U un V minimālais virsotņu skaits (U,V) - atdalošā kopā ir vienāds ar maksimālu skaitu virsotņu šķirtu (U,V) -ķēžu.
PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs lasītājam. *QED*

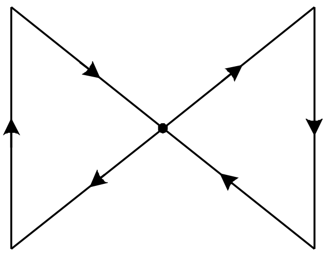
SAKARĪGUMS ORIENTĒTOS GRAFOS

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs.

Virsotnes u un v sauksim par *stingri sakarīgām*, ja eksistē virzītas ķēdes, kas saista u un v (abos virzienos).

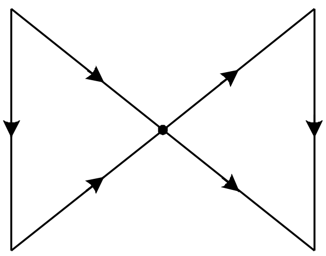
u un v sauksim par *vienpusīgi sakarīgām*, ja eksistē virzīta ķēde, kas saista u un v vismaz vienā virzienā.

Orientētu grafu sauksim par *stingri sakarīgu*, ja jebkuras divas virsotnes ir stingri sakarīgas.



Zīm. 3.35. - stingri sakarīga grafa piemērs.

Orientētu grafu sauksim par vienpusīgi sakarīgu, ja jebkuras divas virsotnes ir vienpusīgi sakarīgas.

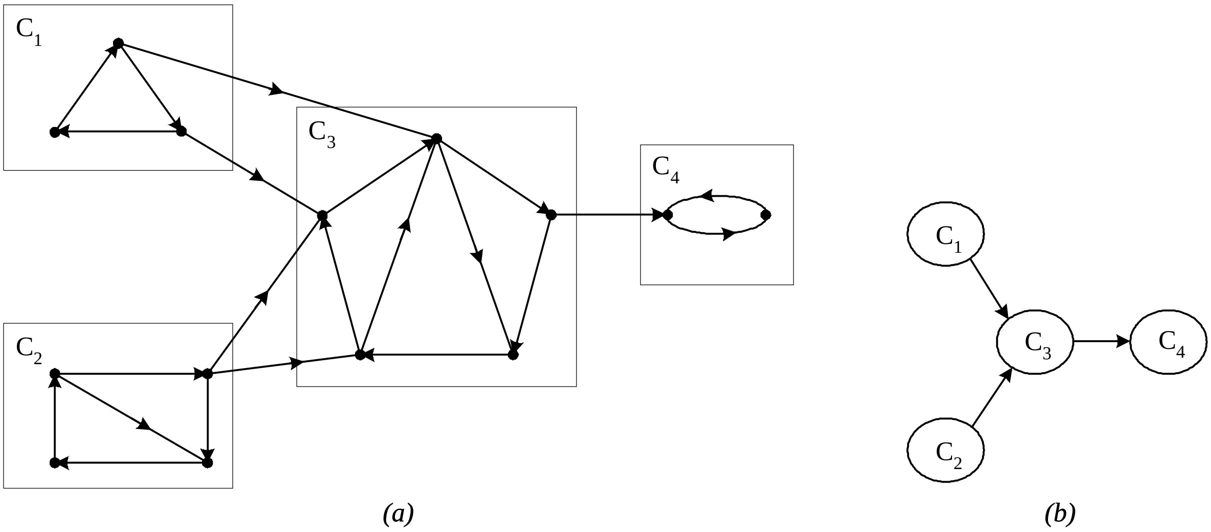


Zīm. 3.36. - vienpusīgi sakarīga grafa piemērs.

Orientētu grafu sauksim par *vāji sakarīgu (sakarīgu)*, ja tam atbilstošais neorientētais grafs ir sakarīgs.

Par orientēta grafa *stingri sakarīgu komponenti* sauc maksimālu stingri sakarīgu apakšgrafu. Orientētu grafu sauc par *reducējamu*, ja tam ir vismaz divas stingri sakarīgas komponentes.

Par orientēta grafa $\Gamma = (V, E)$ *kondensāciju* (Herca grafu) sauc grafu, $H(\Gamma) = (H(V), H(E))$ ko iegūst, savelkot uz vienu virsotni katru stingri sakarīgo komponenti. Citiem vārdiem sakot, H(V) ir visu stingri sakarīgo komponenšu kopa, eksistē šķautne $h_1 \to h_2$, tad un tikai tad, ja eksistē šķautne no vismaz vienas virsotnes komponentē, kas atbilst h_1, uz vismaz vienu virsotni komponentē, kas atbilst h_2. Orientēta grafa kondensācija ir tā grafiski iterētais invariants.



Zīm. 3.37. - orientēta grafa (a) un tā kondensācijas (b) piemērs.

Orientēts grafs ir vienpusīgi sakarīgs tad un tikai tad, ja tā kondensācijas grafs ir orientēta ķēde.

Orientēto grafu sauksim par *aciklisku orientētu grafu (AOG),* ja tajā nav orientētu ciklu. Var redzēt, ka jebkura orientēta grafa kondensācijas grafs ir AOG. Orientēta grafa virsotni sauksim par *avotu*, ja tās pozitīvā puspakāpe ir 0. Orientēta grafa virsotni sauksim par *noteku*, ja tās negatīvā puspakāpe ir 0.

Teiksim, ka orientēta grafa virsotnes ir *lineārajā sakārtojumā* $(v_1,...,v_n)$, ja izpildās šāds nosacījums: ja eksistē šķautne $v_i \to v_j$, tad i<j. AOG ir svarīga orientētu grafu klase, kuras elementi bieži tiek izmantoti modelēšanā.

Par orientēta grafa Γ *bāzi* sauksim minimālu virsotņu kopu ar īpašību, ka jebkurai virsotnei v grafā eksistē bāzes virsotne b, no kuras ir virzīta ķēde līdz v. Orientēta grafa $\Gamma=(V,E)$ virsotņu kopas V apakškopu U sauksim par *iekšēji stabilu*, ja katrai virsotnei $u \in U$ izpildās nosacījums $\Gamma(u) \cap U = \emptyset$, virsotņu kopas V apakškopu W sauksim par *ārēji stabilu*, ja katrai virsotnei $w \in V \setminus W$ izpildās nosacījums $\Gamma(w) \cap W \neq \emptyset$, virsotņu kopas apakškopu sauksim par *kodolu*, ja tā ir gan iekšēji, gan ārēji stabila.

Grafu kodoli tiek pētīti spēļu teorijā šāda iemesla dēļ. Modelēsim spēli ar orientētu grafu $\Gamma=(V,E)$, kuram virsotnes ir spēles stāvokļi un orientētās šķautnes norāda atļautos gājienus. Divi spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas: pirmais spēlētājs izvēlas virsotni v_0 no kādas sākotnējo stāvokļu kopas, pēc tam otrais izvēlas virsotni $v_1 \in \Gamma(v_0)$ un tā tālāk. Ja kāds no spēlētājiem ir spējīgs izvēlēties virsotni, kas ir kodolā, tad šim spēlētājam ir uzvaroša vai vismaz nezaudējoša stratēģija, jo viņa pretiniekam katrā gājienā obligāti ir jāizvēlas virsotne ārpus kodola.