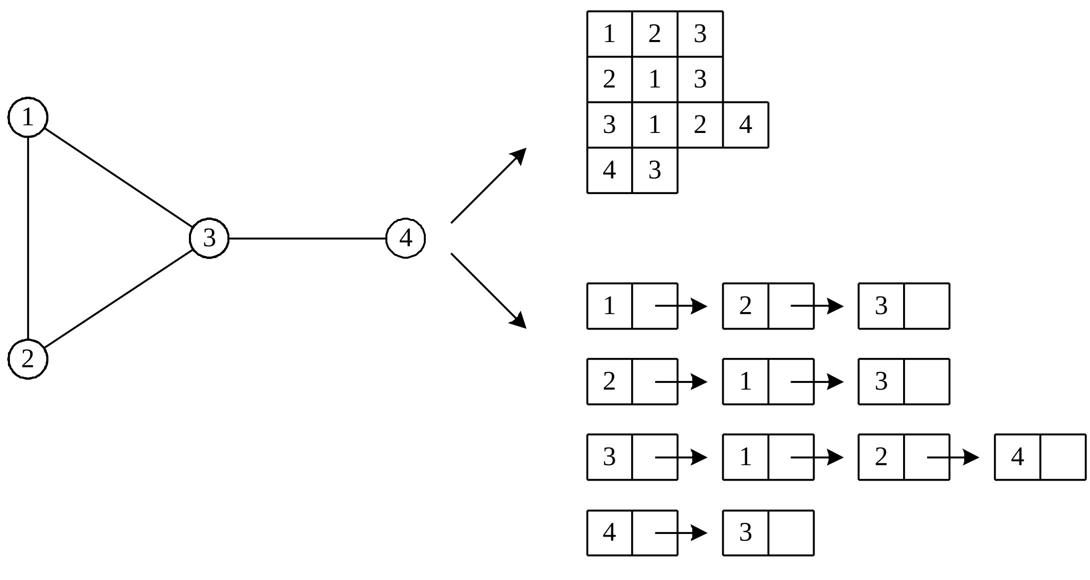
DATU STRUKTŪRAS GRAFU UZDOŠANAI

Sakarā ar grafu plašo pielietošanu informācijas tehnoloģijās ir nepieciešams apspriest jautājumu par grafu uzdošanu datu struktūru veidā. Grafus, tāpat kā jebkurus citus modeļus, ir jāprot pilnvērtīgi un ekonomiski iekodēt ar programmēšanai piemērotu diskrētās matemātikas objektu palīdzību.

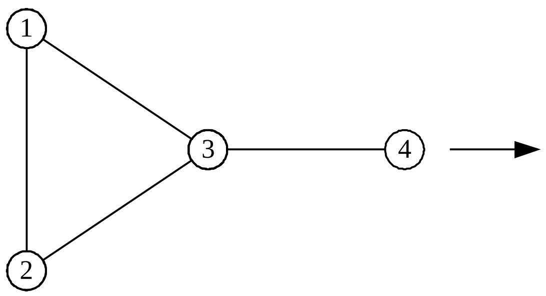
Ir vismaz trīs dažādi datu struktūru veidi, kurus izmanto, lai uzdotu grafus.

Virsotņu blakusattiecības saraksts – katrai virsotnei piekārtosim visas virsotnes, kas ar to ir savienotas,



Zīm.3.24. – grafa uzdošana ar blakusattiecības sarakstu.

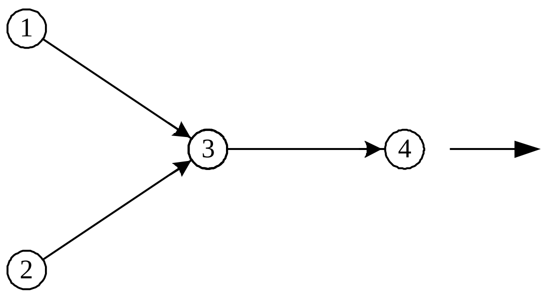
Virsotņu blakusattiecības matrica (kaimiņattiecības matrica, kaimiņmatrica, grafa matrica) – grafu uzdod ar $|V|\times|V|$ bināru matricu, kurā rindas un kolonnas tiek indeksētas ar grafa virsotnēm noteiktā kārtībā, matricas rūtiņā, kas atbilst rindai *u* un kolonnai v tiek ierakstīts 1, ja virsotnes *u* un v ir savienotas un 0, ja tās nav savienotas:



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

Zīm.3.25. – neorientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu.

orientēta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts 1 tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v,u) (no v uz u):



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0

Zīm.3.26. – orientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu.

orientēta nosvērta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts skaitlis w tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v,u) ar svaru w;

V*irsotņu un šķautņu incidences matrica*, grafu uzdod ar $|V|\times|E|$ bināru matricu, rindas tiek indeksētas ar virsotnēm un kolonnas tiek indeksētas ar šķautnēm, matricas rūtiņā, kas atbilst virsotnei *v* un šķautnei e tiek ierakstīts 1, ja virsotne *v* ir incidenta ar škautni e un 0, ja tās nav incidentas.

Blakusattiecības saraksts praktiski tiek izmantots biežāk. Ja grafā ir relatīvi daudz šķautņu, tad var lietot arī papildgrafa blakusattiecības sarakstu vai matricu.

Matricas biežāk izmanto grafu teorētiskos pētījumos, jo dažas grafu īpašības, piemēram, sakarīgumu var interpretēt matricas terminos. Uzskatot grafa matricu par lineāra operatora matricu, var reducēt grafu teorijas uzdevumus uz lineārās algebras, piemēram, īpašvērtību, uzdevumiem.

Var piedāvāt arī kvazilineāru grafu uzdošanas veidu: grafa blakusattiecības matricas rindas var savienot vienā rindā un kodēt grafu kā šai rindai atbilstošo bināro skaitli.

GRAFU PIELIETOJUMI MODELĒŠANĀ

Jebkuras dabas un izcelsmes sistēmas vai parādības uzdošanu matemātisku objektu un sakarību veidā sauksim par šīs parādības *modeli*. Modelis ir realitātes vienkāršota un jēdzieniski noslēgta abstrakta uzdošana.

Modeļi tiek veidoti ar mērķi labāk saprast doto sistēmu. Pietiekoši sarežģītas sistēmas vispār nav iespējams analizēt bez vienkāršotu modeļu palīdzības.

Sistēmas pētīšanu, pārnesot tās īpašības uz modeli, sauksim par sistēmas *modelēšanu*.

Modelēšanas pamatprincipi ir šādi:

1) modeļa izvēle būtiski ietekmē uzdevuma atrisinājuma procesu un pašu atrisinājumu;
2) modeļi var būt ar dažādu detalizācijas pakāpi;
3) sīkāka detalizācijas pakāpe nozīmē lielāku modeļu sarežģītību;
4) labākie modeļi ir tie, kas labāk atspoguļo realitāti;
5) ir vēlams izmantot vienlaicīgi vairākus modeļus.

Ir neskaitāmi daudz piemēru, kur attiecību-grafu modeļu ieviešana padara uzdevuma analīzi un risinājumu uzskatāmu un efektīvu. Parasti tas ir iespējams, ja pētāmajai sistēmai ir diskrētas īpašības.

Galvenie grafu modeļu tipi ir šādi:

1) virsotnes un šķautnes ir fiziski objekti, šķautņu objekti fiziski saista virsotņu objektus,

2) virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, šķautnes saista virsotnes atkarībā no to strukturālajām un/vai funkcionālajām īpašībām,

3) virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, iespējams, dažādos laika vai attīstības momentos, šķautnes norāda virsotņu temporālo, evolucionāro vai cēloņsakarisko atkarību.

Lai izveidotu efektīvu dotās sistēmas grafu modeli, ir

1) jānosaka svarīgākās dotās sistēmas apakšsistēmas un/vai stāvokļi, kas tiks definētas kā grafa virsotnes;
2) jānosaka svarīgākās attiecības starp virsotņu objektiem.

Salīdzinoši retāk tiek izmantoti modeļi, kuros dominējoša nozīme ir šķautnēm, nevis virsotnēm.

Jāpiebilst, ka ir sistēmas, kuras nav iespējams modelēt grafu veidā. Tādas sistēmas parasti ir ar izteikti nepārtrauktām īpašībām, piemēram, atmosfēra vai šķidruma plūsma. Nepārtrauktas sistēmas ērtāk ir modelēt ar matemātiskās fizikas vienādojumu palīdzību. Tiek pielietoti arī jaukti modeļi, kas satur gan nepārtrauktās, gan diskrētās iezīmes.

Pēc modeļa izveidošanas tiek risināti uzdevumu, kas attiecas uz modelējamo sistēmu. Šie uzdevumu var būt formulēti gan tīri grafu teorijas terminos, gan arī izmantojot citas matemātikas teorijas un nozares.

Ja ir definēts kāds grafu modelis M, tad par tā grafu apzīmēsim ar $\Gamma(M)$. Ja ir dots kāds grafu modelis, tad var konstruēt no tā atvasinātus modeļus.

Par dotā grafu modeļa M *apakšmodeli* sauksim grafu modeli M', kura grafs atbilst kādam $\Gamma(M)$ apakšgrafam.

Par dotā grafu modeļa M *faktormodeli* sauksim grafu modeli M'', kura grafs tiek iegūts no $\Gamma(M)$ fiksējot kādu tā virsotņu kopas sadalījumu un identificējot katras sadalījuma klases virsotnes. Apakšmodeļus ir lietderīgi pētīt, ja ir svarīgi apskatīt dotās sistēmas mazāku daļu. Faktormodeļus izmanto, ja sistēmas objektus var sadalīt grupās ar līdzīgām īpašībām.

Zemāk ir pārskaitīti daži konkrēti grafu modeļi:

1) *datorprogrammas blokshēma* (virsotnes – komandas, šķautnes – pārejas starp komandām, izmanto datorprogrammu veidošanā un pārbaudē),

2) *apakšprogrammu grafs* (virsotnes – apakšprogrammas, šķautnes – apakšprogrammu izsaukšanas kārtība, izmanto datorprogrammu projektēšanā un analīzē),

3) *matemātiskas teorijas apgalvojumu grafs* (virsotnes – apgalvojumi, šķautnes – loģiskas secināšanas operācijas, izmanto matemātisko spriedumu pierādīšanā un matemātisko teoriju analīzē),

4) *funkcionālais grafs* (virsotnes – kopas elementi, šķautnes – attēlojuma vai funkcijas darbība, izmanto matemātikā),

5) *lielumu-sakarību grafs* (virsotnes – skaitliski lielumu un sakarības starp tiem, šķautnes – lieluma piedalīšanās sakarībā, izmanto matemātikas uzdevumu risināšanā),

6) *metrikas grafs* (virsotnes – jebkura veida fiziski vai nefiziski objekti vai to kopas, šķautnes – objektu ģeometriska, strukturāla,

funkcionāla vai evolucionāra tuvība, izmanto lielu objektu kopu analīzē),

7) *lēmumu koks* (virsotnes – krīzes stāvokļi, šķautnes – lēmumi, izmanto lēmumu pieņemšanā ekonomikā, vadīšanā, inženierkonstrukciju diagnosticēšanā u.c.),

8) *sistēmas grafs* (virsotnes – sistēmas komponentes, šķautnes – komponenšu mijiedabība, izmanto sistēmu projektēšanā un analīzē),

9) *atgriezenisko saišu grafs* (virsotnes – kāda procesa parametri, orientētas šķautnes ar svaru (+) vai (-) – virsotnēm atbilstošo parametru izmaiņu atkarība, izmanto sistēmas vai procesa sastāvdaļu izmaiņu atkarības, atgriezenisko saišu un to ciklu pētīšanai),

10) *cēloņsakarības grafs* (virsotnes – kādas sistēmas stāvokļi, orientētas šķautnes – cēloņsakarības, izmanto lielu sistēmu vai kompleksu procesu pētīšanā),

11) *konfliktu grafs* (virsotnes – kādas sistēmas stāvokļi, šķautnes – konflikti starp stāvokļiem, izmanto sistēmu analīzē),

12) *spēles grafs* (virsotnes – spēles stāvokļi, šķautnes – spēles noteikumu atļautās pārejas (gājieni) starp stāvokļiem, izmanto spēļu uzvarošo stratēģiju izstrādāšanā),

13) *datortīkls* (vispārīgā gadījumā, komunikāciju tīkls) (virsotnes – datori vai komunikāciju mezgli, šķautnes – sakaru līnijas, izmanto datortīklu projektēšanā un analīzē),

14) *sociālais grafs* (virsotnes – cilvēki vai to kopas, šķautnes – pazīšanās, ekonomiskās vai cita veida attiecības, izmanto sabiedrības analīzē un attīstības plānošanā),

15) *organizācijas grafs* (virsotnes – cilvēki vai to kopas, šķautnes – attiecības, kas raksturo organizācijas, piemēram, privātas firmas vai militāras vienības, hierarhiju, izmanto organizāciju veidošanā un vadīšanā),

16) *projekta grafs* (virsotnes – projekta darbi vai stāvokļi, šķautnes – attiecības starp darbiem vai darbi, kas saista stāvokļus, izmanto projektu vadīšanā);

17) *ģenealoģiskais koks* (virsotnes – cilvēki, šķautnes – “vecāku-bērnu” attieksme, izmanto personīgos pētnieciskos nolūkos),

18) *ekonomisko aģentu grafs* (virsotnes – ekonomiskie aģenti vai to kopas, šķautnes – ekonomiskas attiecības, izmanto ekonomiskos pētījumos un plānošanā),

19) *makroekonomiskais finanšu plūsmas grafs* (virsotnes – tautsaimniecības nozares, šķautnes – finanšu plūsmas starp nozarēm, izmanto ekonomiskos pētījumos un plānošanā),

20) *ceļu grafs* (virsotnes – pilsētas, šķautnes – ceļi, izmanto transporta tīkla attīstībā),

21) *ielu grafs* (virsotnes – krustojumi, šķautnes – ielas, izmanto pilsētas transporta plūsmu analīzē un plānošanā),

22) *elektriskās ķēdes grafs* (virsotnes – elektromagnētiski aktīvie elementi, šķautnes – vadi vai kontakti, izmanto elektrisko shēmu pierakstā un analīzē),

23) *"barošanas ķēde"* (virsotnes – sugas, šķautnes – "barošanas" attiecība, izmanto biosistēmu analīzē),

24) *evolucionārais koks* (virsotnes – sugas vai populācijas, šķautnes – evolucionārās izcelsmes attiecībā, izmanto bioloģijā),

25) *ķīmisko vielu reakciju grafs* (virsotnes – ķīmiskas vielas, šķautnes – reaģēšanas iespēja, izmanto sarežģītu ķīmisko reakciju analīzē),

26) *ķīmiskas vielas priekšteču grafs* (virsotnes – ķīmiskas vielas, kuras tiek iegūtas kādas vielas ražošanas procesā (priekšteči), šķautnes – priekšteču izmaiņas ražošanas procesā, izmanto ķīmiskajā rūpniecībā)

27) *sprādzienbīstamības grafs* (virsotnes – ķīmiskas vielas, šķautnes – sprādziena reakcijas iespējamība, ja vielas ir kontaktā, izmanto darba drošības vajadzībām),

28) *radiosakaru traucējumu grafs* (virsotnes – radiostacijas, šķautnes – radioviļņu joslu savstarpēja pārklāšanās, izmanto radiosakaru un mobilo sakaru plānošanā),

29) *politiskais grafs* (virsotnes – valstis, šķautnes – robežas, izmanto ģeopolitikā),

30) *asinsvadu grafs* (virsotnes – asinsvadu sazarojumi, šķautnes – asinsvadi, izmanto medicīnā),

31) *neironu grafs* (virsotnes – neironi, šķautnes – neironu savienojumi, izmanto medicīnā),

32) *kulinārijas izstrādājuma gatavošanas grafs* (virsotnes – kulinārijas izstrādājuma stāvokļi (sākot no pamatkomponentēm), šķautnes – pārejas starp stāvokļiem gatavošanas procesā, izmanto ēdienu gatavošanā).

GRAFU IZOMORFISMS UN INVARIANTI

IZOMORFISMS

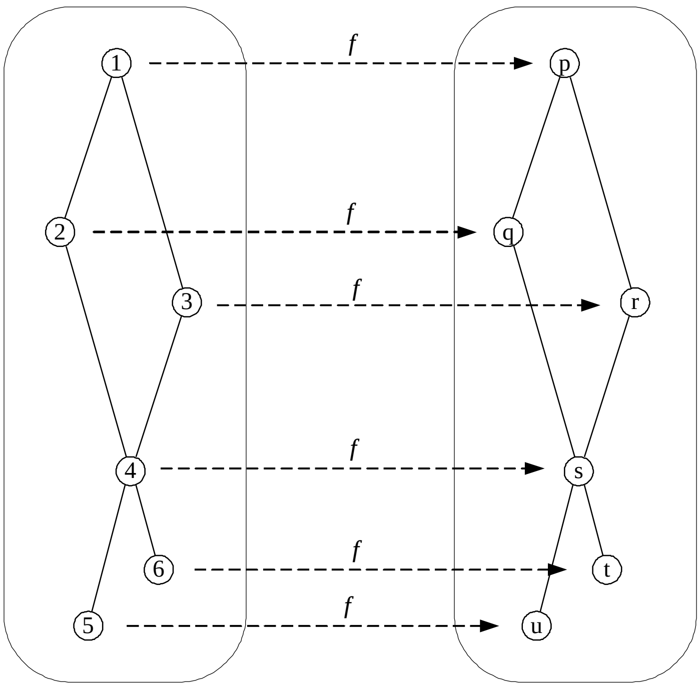
Dabiski ir uzdot jautājumu, kad divi grafi ir neatšķirami kā matemātiski objekti jeb, citiem vārdiem sakot, kad divi grafi ir „vienādi”, ja mēs ignorējam to virsotņu dabu un attēlošanas veidu.

Tā kā grafs ir struktūra, kas satur informāciju par virsotņu saistību vai nesaistību, piemēram, matricas veidā, tad dabiski ir pieprasīt, ka divi grafi ir matemātiski neatšķirami, ja to virsotņu kopas var sakārtot tā, ka grafu matricas ir vienādas.

Atcerēsimies arī, ka kopu sakārtojumus var interpretēt kā bijektīvas funkcijas.

Divus neorientētus vai orientētus grafus $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$ sauksim par *izomorfiem* ($\Gamma \cong \Gamma'$), ja eksistē bijektīva funkcija $f : V \to V'$ tāda, ka $(v_1, v_2) \in E$ tad un tikai tad, ja $(f(v_1), f(v_2)) \in E'$. Citiem vārdiem sakot, funkcija f saglabā virsotnes un šķautnes. Šādā gadījumā funkciju f sauksim par *grafu izomorfismu*.

PIEMĒRS Zīmējumā 3.27 ir parādīts izomorfisms $j : \Gamma \to \Gamma'$



Zīmējums 3.27. grafu izomorfisma piemērs.

Par grafa *izomorfisma tipu (klasi)* sauksim visu ar to izomorfo grafu kopu.

Grafa izomorfisma klasi var attēlot, ja virsotnes attēlo kā punktus.

Bijektīvu funkciju $f:V\to V$ sauksim par grafa $\Gamma=(V,E)$ *automorfismu (*Γ-automorfismu), ja tas ir grafa izomorfisms uz sevi.

Grafa Γ automorfismu kopu apzīmēsim ar $Aut(\Gamma)$. Grafa automorfisms ir arī tā papildgrafa automorfisms.

Katrai grafa virsotnei v kopu $\bigcup_{f\in Aut(\Gamma)} f(v)$ sauksim par šīs virsotnes *orbītu*.

Var redzēt, ka orbītas veido grafa virsotņu kopas sadalījumu.

Ja šis sadalījums satur vienu elementu, tad teiksim, ka grafs ir *virsotņu transitīvs*. Citiem vārdiem sakot, grafs ir virsotņu transitīvs tad un tikai tad, ja jebkurām divām virsotnēm u un v eksistē grafa automorfisms f tāds, ka f(u)=v.

Ja $f:V\to V$ ir grafa $\Gamma=(V,E)$ automorfisms un $\Gamma'=(V',E')$ ir inducēts apakšgrafs, tad $f(\Gamma')$ tiek definēts kā grafs $(f(V'), f(E'))$, kur šķautnes $e=(u,v)$ attēls ir $f(e)=(f(u), f(v))$.

Ievērosim, ka katram inducētam apakšgrafam $\Gamma' \subseteq \Gamma$ un katram automorfismam f ir spēkā apgalvojums $\Gamma' \cong f(\Gamma')$.

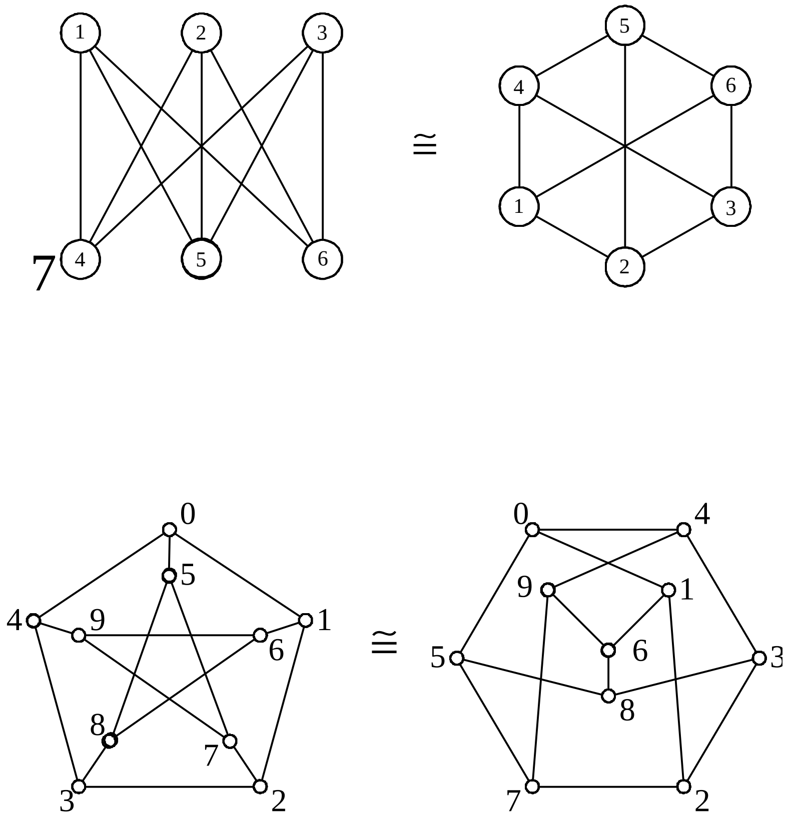
Teiksim, ka inducētie apakšgrafi Γ' un $f(\Gamma')$ ir *vienādi ar precizitāti līdz grafa automorfismam* f.

TEORĒMA 3.4. Visi grafa automorfismi veido grupu attiecībā uz funkciju kompozīcijas operāciju.

PIERĀDĪJUMS Var redzēt, ka virsotņu kopas vienības funkcija ir jebkura grafa automorfisms. Jebkura grafa automorfisma inversā funkcija ir grafa automorfisms un divu grafa automorfismu kompozīcija ir grafa automorfisms. *QED*

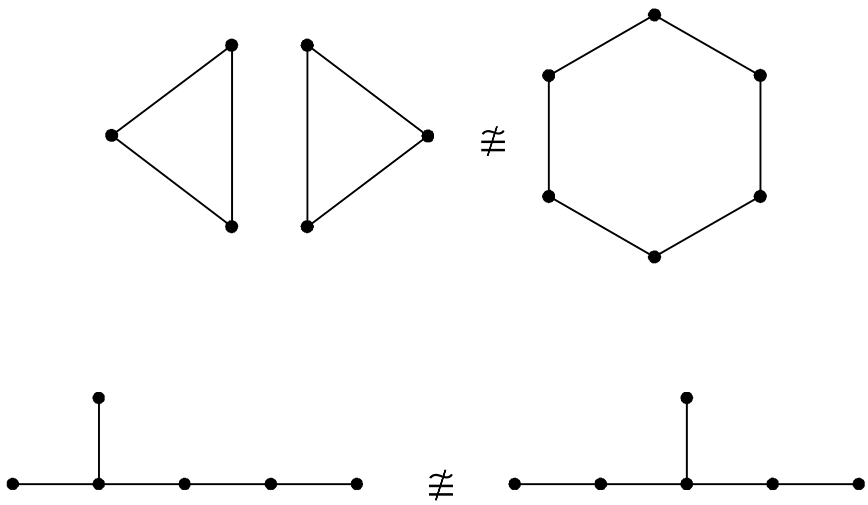
Var pierādīt, ka katrai galīgai grupai G eksistē galīgs grafs Γ, tāds, ka $Aut(\Gamma) \cong G$ (Fruhta teorēma).

PIEMĒRI Zīmējumā 3.28. ir parādīti izomorfu grafu pāri:



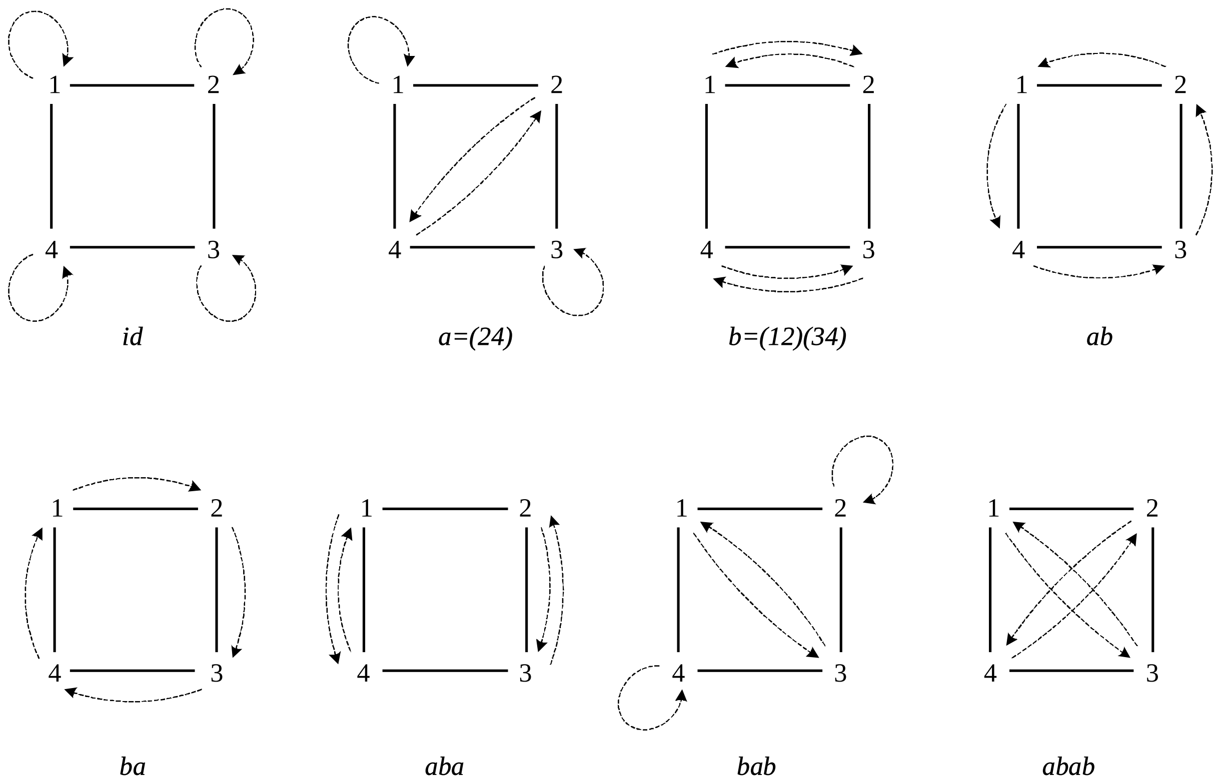
Zīm. 3.28. – izomorfu grafu pāru piemēri.

Zīmējumā 3.29 ir parādīti neizomorfu grafu pāri, kuriem pakāpju vektori ir vienādi:



Zīm. 3.29. – neizomorfu grafu pāru piemēri.

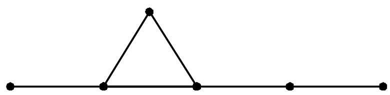
Zīmējumā 3.30. ir parādīti cikla C_4 automorfismi:



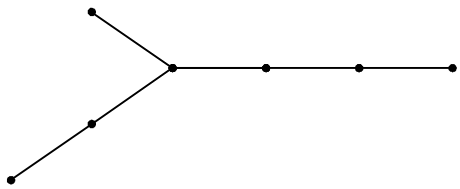
Zīm. 3.30. – visi cikla C_4 automorfismi.

Var redzēt, ka $|Aut(\Gamma)|=8$ un par minimālu veidotājsistēmu var izvēlēties divu funkciju kopu, kas atbilst virsotņu permutācijām $a=(24)$ un $b=(12)(34)$.

Zīmējumā 3.31. attēloto grafu automorfismu grupas satur vienu elementu – vienības funkciju.



(a)



(b)

Zīm.3.31. – grafi ar triviālu automorfismu grupu.

Grafa automorfismu grupu var uzskatīt par grafa simetrijas mēru – jo lielāka ir attiecība $\frac{|Aut(\Gamma)|}{|V(\Gamma)|}$, jo grafs ir simetriskāks.

INVARIANTI

Kā praktiski noteikt vai divi grafi ir izomorfi?

Naivs veids kā noteikt vai divi grafi ir izomorfi, ir fiksēt viena grafa matricu un apskatīt visas otrā grafa matricas, kas atbilst dažādām virsotņu kopas permutācijām.

Acīmredzami šis algoritms nav efektīvs, jo virsotņu permutāciju skaits grafam ar n virsotnēm ir $n!$, tāpēc nosakot, vai divi grafi ir izomorfi, ir lietderīgi izmantot to (skaitliskas) īpašības, kuras sakrīt izomorfiem grafiem un var nesakrist neizomorfiem grafiem.

Apzīmēsim visu grafu kopu ar G un fiksēsim kādu kopu S, kas parasti ir skaitļu kopa, skaitļu virkņu kopa vai viena vai vairāku argumentu funkciju kopa.

Funkciju $f:G\to S$ sauc par *grafu invariantu*, ja no tā, ka $\Gamma\cong\Gamma'$ seko, ka $f(\Gamma)=f(\Gamma')$. Ekvivalenta definīcija: ja $f(\Gamma)\neq f(\Gamma')$, tad $\Gamma\ncong\Gamma'$.

Invariantu sistēmu $\{f_i\}_{i\in I}$ sauc par *pilnu*, ja no tā, ka $f_i(\Gamma)=f_i(\Gamma')$ visiem i seko, ka $\Gamma\cong\Gamma'$.

Invariantus izmanto, lai atšķirtu neizomorfus grafus: ja uz diviem grafiem invariants pieņem dažādas vērtības, tad uzreiz var secināt, ka grafi nav izomorfi.

Biežāk izmantotos grafu invariantus pēc to izcelsmes var iedalīt šādās grupās:

1)elementārie – invarianti, kas ir saistīti ar grafa apakšgrafiem, piemēram, virsotņu skaits, šķautņu skaits, maksimālā virsotnes pakāpe, minimālā virsotnes pakāpe, pakāpju vektors, komponenšu skaits, fiksēta garuma ķēžu un ciklu skaits, fiksēta izomorfisma tipa apakšgrafu skaits, u.c.,

2)metriskie – invarianti, kas ir saistīti ar „attālumu" starp grafa virsotnēm,

3)strukturālie – invarianti, kas ir saistīti ar sakarīgumu, 4)topoloģiskie – invarianti, kas ir saistīti ar grafa ievietošanu plaknē vai uz slēgtas divdimensionālas virsmas,

5)hromatiskie – invarianti, kas ir saistīti ar virsotņu un šķautņu kopu „neatkarību” (skatīt atbilstošo nodaļu šajā tekstā),

6)algebriskie – grafa saistības matricas īpašvērtības un raksturīgais polinoms, grafa automorfismu grupa,

7)grafiski iterētie – invarianti, kas atbilst grafiem, kas atvasināti no dotajiem grafiem.

Grafu invariantus var klasificēt arī pēc to aprēķināšanai nepieciešamajiem laika un telpas resursiem asimptotiku nozīmē kā arī pēc to aprēķinošo algoritmu kompleksitātes automātu teorijas nozīmē.

Grafu invariantus var arī apvienot sistēmās un apskatīt objektus, kas atgādina kombinatorikā izmantotās veidotājfunkcijas.

PIEMĒRS Definēsim šādus invariantus:

- $A(x,\Gamma)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kur a_n ir grafa Γ inducēto apakšgrafu ar n šķautnēm skaits,
- $B(x,y,\Gamma)=\sum_{m=0,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$, kur a_{mn} ir grafa Γ inducēto apakšgrafu ar m virsotnēm un n šķautnēm skaits,

- $C(x,y,z,\Gamma)=\sum_{m=0,n=0,p=0}^{\infty}a_{mnp}x^m y^n z^p$, kur a_{mnp} ir grafa Γ inducēto apakšgrafu ar m virsotnēm un n šķautnēm skaits, kuru ir savienototi ar pārējo grafa daļu ar p šķautnēm.

Uz šo brīdi nav zināma pilna un viegli aprēķināma invariantu sistēma, vai nu invariants ir pilns un aprēķināms tikpat lēni kā izomorfisms (piemēram, minimālais binārais skaitlis, ko iegūst pārrakstot matricu bināras virknes veidā) vai arī tas nav pilns un ātri aprēķināms (piemēram, virsotņu un šķautņu skaits).

Nākošajā nodaļā sīkāk apskatīsim grafa metriskos invariantus.

GRAFU METRISKIE INVARIANTI

Svarīga invariantu klase ir invarianti, kas ir saistīti ar virsotnes savienojošo ķēžu īpašībām.

Izrādās, ka grafu teorijā var definēt ģeometriskā attāluma analogu, kas rada vairākus netriviālus grafu invariantus.

Par *attālumu* starp divām virsotnēm v un w sauksim (v,w)-ķēžu garumu minimumu, attālumu starp virsotnēm v un w apzīmēsim ar dist(v,w), tā ir divu argumentu funkcija $V(\Gamma)\times V(\Gamma)\to N\cup\{0\}$.

Attālumu starp divām virsotnēm dažādās komponentēs definēsim vienādu ar bezgalību.

Par grafa *diametru* sauksim maksimālo attālumu starp divām virsotnēm grafā, jeb, citiem vārdiem, sakot, attāluma funkcijas maksimālo vērtību grafā, šo lielumu apzīmēsim ar $D(\Gamma)$.

Par virsotnes *ekscentritāti* sauksim maksimālo attālumu no šīs virsotnes līdz kādai citai virsotnei dotajā grafā, $e(v)$.

Par grafa *centru* sauksim grafa virsotņu kopu ar minimālo ekscentritāti, to apzīmēsim ar $Z(\Gamma)$.

Centra virsotņu ekscentritāti sauksim par grafa *rādiusu*, to apzīmēsim ar $R(\Gamma)$.

Virsotnes, kuru ekscentritāte ir vienāda ar grafa diametru, sauksim par *perifērijas virsotnēm*. Virsotni, kuras attālums līdz jebkurai citai virsotnei ir 1, sauksim par *dominējošu virsotni*. Kēdi, kuras garums ir vienāds ar grafa diametru, sauksim par *diametrālu ķēdi*.

Ja ir dots grafs Γ, tad par tā *k-to pakāpi* Γ^k sauc grafu, kurā divas virsotnes u,v ir saistītas tad un tikai tad, ja $dist(u,v) \le k$.

Orientētu grafu gadījumā attālumu starp divām virsotnēm definē kā minimālo šķautņu skaitu orientētā ķēdē, kas savieno šīs virsotnes.

TEORĒMA 3.5. Attāluma funkcija apmierina šādas īpašības:

1) dist(u,v)=dist(v,u) (*simetrija*),
2) dist(u,v) tad un tikai tad, ja u=v (*nedeģenerētība*)
3) $dist(u,v) \le dist(u,w) + dist(w,v)$ (*trijstūra nevienādība*).

PIERĀDĪJUMS Pirmie divi apgalvojumi ir acīmredzami.

Lai pierādītu trešo apgalvojumu, pieņemsim pretējo. Ja eksistētu virsotne w tāda, ka $dist(u,v) > dist(u,w) + dist(w,v)$, tad tā būtu pretruna, jo tad eksistētu maršruts no u uz v caur w, kura garums būtu mazāks nekā dist(u,v). *QED*

NEATRISINĀTAS GRAFU TEORIJAS PROBLĒMAS PIEMĒRS – LIELAIS MŪRA GRAFS (THE BIG MOORE GRAPH)

50.gados sākās pētījumi par daudzprocesoru datoriem – datoriem, kuros ir vairāki procesori, kas ir savā starpā saistīti ar sakaru līnijām – tos var modelēt kā neorientētus grafus (virsotnes – procesori, šķautnes – sakaru līnijas).

Starpprocesoru sakaru līnijas ir dārgas un tās ir grūti apkalpot, liels sakaru līniju skaits vai sakaru līniju/procesoru skaitu attiecība samazina datora efektivitāti.

Galvenā prasība daudzprocesoru sistēmu projektēšanā ir minimizēt sakaru līniju un procesoru skaita attiecību.

Papildus prasības ir šādas:

1) procesoru-sakaru līniju grafam jābūt ar pēc iespējas *mazāku diametru* (lai jebkuri divi procesori varētu ātri apmainīties ar informāciju),
2) procesoru-sakaru līniju grafam jābūt pēc iespējas *simetriskam*, lai atvieglotu tā darba vadīšanu (lai programmatūra tā darba vadīšanai būtu pēc iespējas vienkāršāka) – metrisko invariantu terminos šo prasību var noformulēt šādi: kā minimums grafam vēlams būt regulāram un visu virsotņu ekscentritātēm vēlams būt vienādām,

3) vēlams arī, lai grafa automorfisma grupa būtu pēc iespējas lielāka un tās struktūra būtu vienkārša.

Ja diametrs ir 1, tad grafs ir pilns – šķautņu un virsotņu skaitu attiecība ir

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{n-1}{2},$$

kur n ir virsotņu skaits.

Nākošais gadījums – diametrs ir 2. Ja grafs ir k-regulārs ar diametru 2, tad maksimāli iespējamais virsotņu skaits ir $1+k+k(k-1)=k^2+1$, šķautņu un virsotņu skaitu attiecība ir

$$\frac{\frac{n\sqrt{n-1}}{2}}{n} = \frac{\sqrt{n-1}}{2},$$

kur n ir virsotņu skaits – šī attiecībā ir mazāka nekā gadījumā, kad diametrs ir 1.

Regulāru grafu, kura virsotņu pakāpe ir k, diametrs ir 2 un virsotņu skaits ir k^2+1, sauc par *Mūra grafu ar diametru 2* (var definēt arī Mūra grafu ar jebkuru diametru).

Izmantojot lineāro algebru, precīzāk, grafa matricas īpašvērtību analīzi, ir atrasts, ka Mūra grafi ar diametru 2 ir iespējami tikai dažām virsotņu pakāpes k vērtībām: $k \in \{2, 3, 7, 57)$. Apskatīsim šos gadījumus:

1) k=2 - cikls ar garumu 5,

2) k=3 - Petersena grafs, pierādīt šo faktu nav grūti,

3) k=7, ir konstruēts atbilstošais Mūra grafs (ar 50 virsotnēm, virsotņu pakāpi 7 un diametru 2) *(Hofmana-Singltona grafs, 1960)* – tas ir grūts uzdevums patstāvīgam darbam, kuru var atrisināt ar meklēšanas algoritmu palīdzību,

4) k=57 - neatrisināta matemātiska problēma (uz 2005.gada novembri), nav zināms vai tāds grafs eksistē vai ne!

Lasītājām mēs piedāvājam risināt šo problēmu - *atrast regulāru grafu ar virsotņu pakāpi 57, virsotņu skaitu 3250 un diametru 2 (Lielo Mūra Grafu) vai pierādīt, ka tāds neeksistē.*

Viegli redzēt, ka šim grafam piemīt šādas papildus īpašības – tajā nav ciklu ar garumu 3 un 4 (tad virsotņu skaits nebūtu maksimāls), tātad minimāls cikls ir ar garumu 5.