GRAFU TEORIJA

IEVADS

Viens no fundamentāliem matemātikas pamatjēdzieniem ir attiecība – īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopu elementu pāriem. Vizuāli iekodēta informācija ir vieglāk uztverama un apstrādājama nekā jebkura cita veida informācija.

Uz datorzinātnēm orientēti lasītāji par vizualizāciju var domāt kā par pētāmās sistēmas pirmapstrādi (preprocesingu), kuras rezultātā sistēma tiek reprezentēta tādā veidā, ka tā var tikt apstrādāta ātrāk un ar mazāk kompleksām programmām vai automātiem.

Tāpat kā risinot uzdevumus par kopām ir lietderīgi vizualizēt kopas Eilera-Venna diagrammu veidā, arī uzdevumos par attiecībām ir lietderīgi mēģināt vizualizēt attiecības.

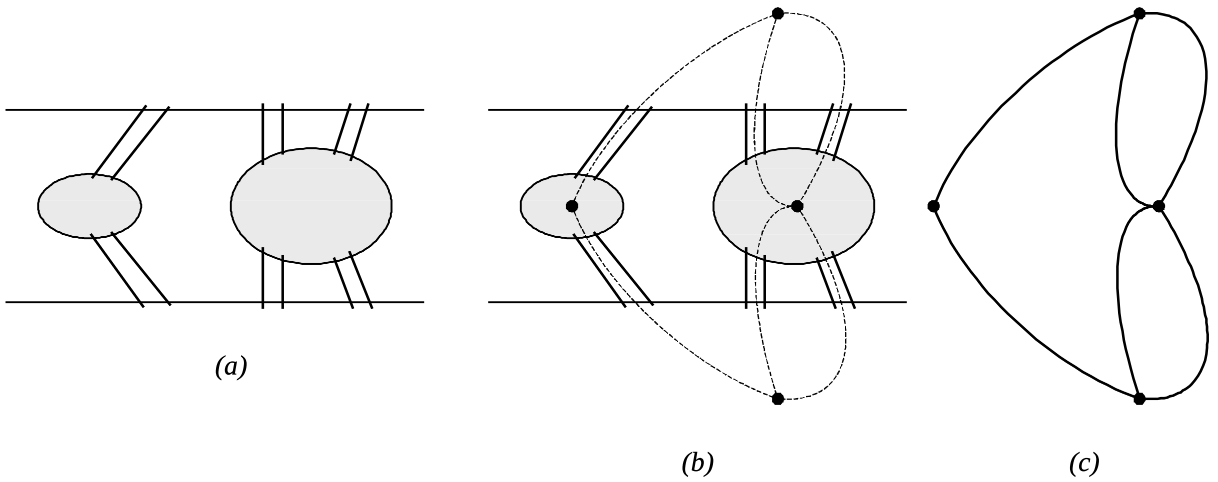
Kopu elementus kā elementārus (nedalāmus, atomārus) objektus parasti attēlo kā punktus vai aplīšus ar tajos ierakstītu informāciju. Tā kā attiecība ir īpašība, kas saista elementu pārus, tad šo īpašību ir pieņemts attēlot kā elementus saistošas nepārtrauktas līnijas (šķautnes, bultiņas, nogriežņus) ar tādu papildinformāciju, kas ir nepieciešama pareizai uzdevuma nosacījumu grafiskai iekodēšanai. Parasti šī papildinformācija ir šķautņu vai virsotņu parametri jeb „svari”.

Šādu attiecības vizualizācijas veidu sauc par tās *grafu*. Terminam „grafs” ir grieķu izcelsme, šī vārda saknes nozīme ir „raksts” vai „rakstu zīme” Attiecības vizualizācija grafa veidā palīdz to analizēt gan teorētiski, gan arī empīriski, izmantojot informācijas tehnoloģijas. Termins “grafu teorija” mūsdienās ir termina “attiecību teorija” sinonīms.

Grafu pielietošana matemātikas uzdevumu risināšanā un ar grafiem-attiecībām saistītā matemātikas revolucionalizēšana sākās 18.gadsimta vidū (1736.gadā) ar matemātiķa L.Eilera darbiem. Kā relatīvi jaunai un dinamiskai matemātikas nozarei ar plašiem pielietojumiem grafu teorijai vēl nav pilnībā nostabilizējusies terminoloģija, kas ir daudzveidība un atspoguļo pielietojumu nozaru specifiku. Arī terminam *grafs* ir vairāki sinonīmi – *diagramma*, *struktūra* u.c.

Apskatīsim dažus uzskatāmus ievadpiemērus.

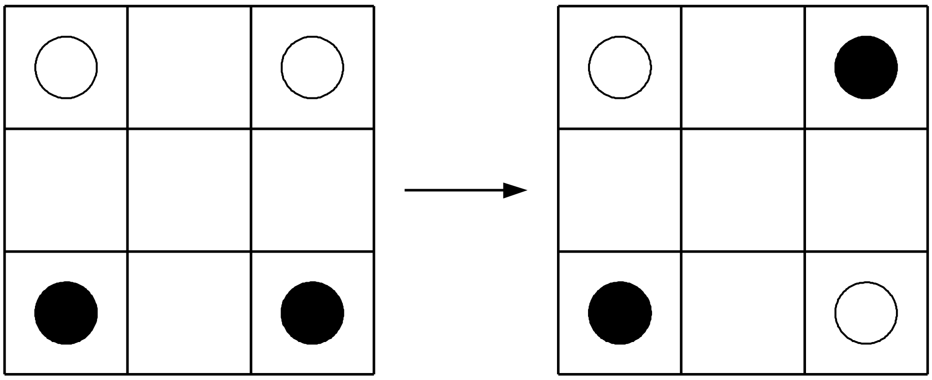
PIEMĒRS Vēsturiski viens no pirmajiem publicētajiem grafu pielietošanas piemēriem ir atrisinājums „uzdevumam par Kēnigsbergas tiltiem” no izklaidējošās matemātikas, kura autors ir izcilais 18.gadsimta matemātiķis L.Eilers. Ir dota upe, kurā ir divas salas un vairāki tilti (skatīt Zīm.3.1, (a)).



Zīm. 3.1 – uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem.

Vai ir iespējams iziet no kāda punkta, pāriet pār katru tiltu tieši vienu reizi un atgriezties sākotnējā punktā? Tā kā uzdevuma risināšanā kritiska loma ir tiltiem, tad modelēsim uzdevumu šādā veidā: piekārtosim katram sauszemes gabalam vienu punktu un saistīsim divus punktus ar līniju tad un tikai tad, ja atbilstošie sauszemes gabali ir saistīti ar tiltu (skatīt Zīm.3.1, (b)). Uzmanīgi apskatot zīmējumu un domājot tikai par uzdevuma vienkāršoto modeli (skatīt Zīm.3.1, (c)), uzdevuma atrisinājums šķiet acīmredzams. Ja uzdevumam eksistētu atrisinājums, tad iegūtajā grafā eksistētu noslēgts „ceļš”, kurā tiek iets pa šķautnēm un kurš saturētu katru šķautni tieši vienu reizi. Ja eksistē tāds ceļš, tad katrai virsotnei ir jābūt ar pāra skaitu šķautnēm. Bet šajā grafā ir virsotnes, kurām atbilst nepāra skaits šķautņu, tātad uzdevumam nav atrisinājuma.

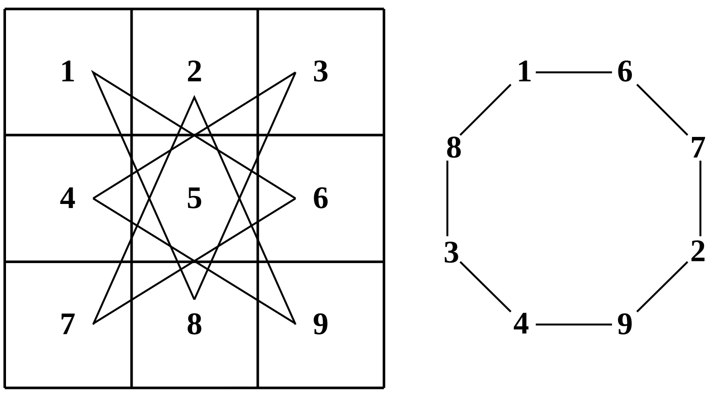
PIEMĒRS Uz 3×3 „šaha galda” ir izvietoti divi balti un divi melni zirgi tā, kā parādīts Zīm.3.2, (a). Vai ir iespējams tos pārvietot uz stāvokli, kas parādīts Zīm.3.2, (b), ja divas figūras nevar atrasties vienā lauciņā?



(a) *(b)*

Zīm.3.2. – uzdevums par 4 šaha zirgiem.

Modelēsim uzdevumu šādi: piekārtosim katram lauciņam vienu virsotni un saistīsim divas virsotnes ar līniju, ja atbilstošie lauciņi ir saistīti ar zirga gājienu (skatīt Zīm. 3.3, (a)).

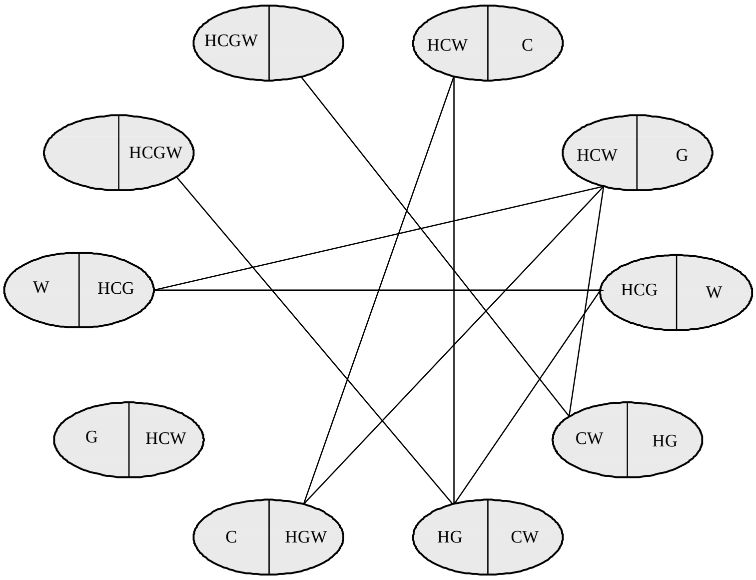


(a) *(b)*

Zīm. 3.3 – grafs uzdevumam par 4 šaha zirgiem.

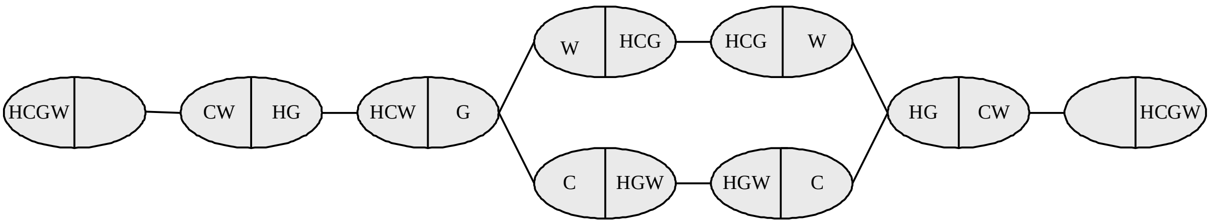
Tagad aizmirsīsim par šaha galdu kā fizikālu objektu un pārkārtosim grafa virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt Zīm.3.3, (b)). Viegli redzēt, ka uzdevumam nav atrisinājuma, jo sākuma stāvoklī starp diviem baltajiem zirgiem nav melnā zirga, bet beigu stāvoklī starp tiem ir jābūt melnajam zirgam, grafa šķautnes ir izvietotas tā, ka divi blakus esoši zirgi nevar pārlekt viens otram pāri.

PIEMĒRS Izmantojot grafus atrisināsim klasisko uzdevumu par vilku, kazu un kāpostu. Vienā upes krastā ir cilvēks H, laiva, vilks W, kaza G un kāposts C. Laivā var atrasties cilvēks un ne vairāk kā viens no pārējiem objektiem. Cilvēkam ir jāpārved uz otru krastu visi objekti, ievērojot nosacījumu, ka viņš nevar atstāt bez pieskatīšanas vilku kopā ar kazu vai kazu kopā ar kāpostu. Modelēsim šo uzdevumu ar grafu palīdzību. Grafa virsotnes būs iespējamie visu četru objektu stāvokļi. Katru konfigurāciju attēlosim veidā (A|B), kur A ir objekti, kas atrodas sākotnējā krastā un B ir objekti, kas atrodas otrā krastā, piemēram, sākumā stāvoklī atbilstošās virsotnes konfigurācija būs (HWGC|), ja no sākuma stāvokļa cilvēks pārved uz otru krastu kazu, tad konfigurācija būs (WC|HG), beigu konfigurācija būs (|HWGC). Uzskatīsim, ka laiva vienmēr ir kopā ar cilvēku. Divas konfigurācijas saistīsim ar šķautni, ja tās ir saistītas ar vienu laivas braucienu. Atmetīsim visas konfigurācijas, kurās kādā no krastiem ir kopas WG, GC, WGC un uzzīmēsim grafu ar atlikušajām virsotnēm (skatīt Zīm.3.4):



Zīm. 3.4. – grafs uzdevumam par vilku, kazu un kāpostu.

Pārkārtosim virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt Zīm. 3.5):



Zīm. 3.5. – vienkāršots grafs uzdevumam par vilku, kazu un kāpostu.

Tā kā eksistē divas dažādas nepārtrauktas ķēdes no virsotnes (HWGC|) uz virsotni (|HWGC), tad uzdevumam ir divi dažādi atrisinājums, kurus var viegli nolasīt no grafa.

PIEMĒRS Pielietosim grafus vienkāršu matemātikas uzdevumu analīzē un risināšanā.

Atrisināsim šādu uzdevumu: dotas taisnleņķa trijstūra katetes a un b, atrast ierakstītās riņķa līnijas rādiusu r.

Atkārtosim vienkāršākās sakarības, kas saista katetes a un b, hipotenūzu c, šauro leņķi a ar pretkateti a, tā papildinājumu b, trijstūra laukumu S, perimetru P, apvilktās riņķa līnijas rādiusu R un ievilktās riņķa līnijas rādiusu r:

1) $a + b = \frac{p}{2}$;

2) $tg a = \frac{a}{b}$;

3) $\sin a = \frac{a}{c}$;

4) $a^2 + b^2 = c^2$;

5) $S = \frac{ab}{2}$;

6) P=a+b+c;

7) $R = \frac{c}{2}$;

8) $S = \frac{rP}{2}$.

Definēsim grafu, kurā ir divu tipu virsotnes –

a) lielumi a,b,c, a , b , S,P,R,r;
b) sakarības 1)-8).

Savienosim lielumu ar sakarību tad un tikai tad, ja lielums piedalās sakarībā. Piemēram, sakarība 4) ir savienota ar lielumiem a,b, un c.

Iegūtais grafs parāda dotā ģeometrijas uzdevuma lielumu un sakarību savstarpējās attiecības.

Izmantojot iespēju piešķirt šķautnēm virzienu, mēģināsim parādīt uzdevumu risināšanas gaitā iegūto zināšanu uzkrāšanas procesu un pašu risinājumu.

Uzskatīsim, ka orientēta šķautne no lieluma x uz sakarību A nozīmē to, ka lielums x tiek ievietots sakarībā A. Uzskatīsim, ka orientēta šķautne no sakarības A uz lielumu x nozīmē, ka ir iespējams noteikt lielumu x izmantojot sakarību A. Ja kādas sakarības A visas šķautnes, izņemot vienu, tajā ieiet, tad varam piešķirt atlikušajai šķautnei izejošo virzienu, jo lielumu, kas atbilst atlikušajai šķautnei, varam atrast, izmantojot sakarību A. Sakarības virsotni sauksim par pareizu, ja tajā visas šķautnes izņemot vienu ir ieejošas.

Risināsim uzdevumu šādā veidā. Sāksim ar dotajiem lielumiem a un b, katrai šķautnei, kas iziet no šīm virsotnēm uzdosim virzienu no lieluma uz sakarību. Ja kādai sakarības virsotnei visas šķautnes izņemot vienu ir orientētas kā ieejošas, tad padarīsim to par pareizu, orientējot atlikušo šķautni kā izejošu. Turpināsim šo procesu tik ilgi, kamēr ir konstruēts orientēts līdz virsotnei r.

PAMATDEFINĪCIJAS

Definēsim plašāk izmantotās grafu klases un grafu teorijas pamatjēdzienus.

Par *grafu (neorientētu grafu)* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - *grafa virsotņu* kopa, $V \neq \varnothing$ un $E \subseteq V \times V$ ir grafa šķautņu kopa , kur E apmierina šādus nosacījumus:

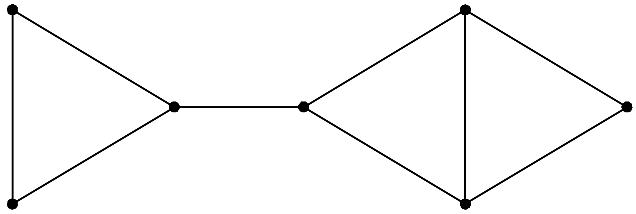
1) $E = E^{-1}$, ja šķautne $(u, v) \in E$, tad arī $(v, u) \in E$,
2) $E \cap diag(V \times V) = \varnothing$ - nav šķautņu, kuriem abi galapunkti ir vienādi (atgādināsim, ka mēs definējam $diag(V \times V) = \{(v_1, v_2) \in V \times V \mid v_1 = v_2\}$ un saucam to par kopas $V \times V$ *diagonāli*).

Šajā tekstā pēc noklusēšanas mēs uzskatīsim, ka virsotņu kopa V ir galīga kopa. Ja vienlaicīgi tiek strādats ar grafiem, kuru virsotņu kopas ir gan galīgas, gan bezgalīgas, tad lieto terminus „galīgs grafs” un „bezgalīgs grafs”.

Neorientētam grafam atbilst simetriska antirefleksīva attiecība. Nosacījums 1) atbilst simetrijai un nosacījums 2) - antirefleksivitātei.

Literatūrā un zinātnieku vai datorspeciālistu sarunvalodā parasti ar terminu „grafs” pēc noklusēšanas tiek domāts

„neorientēts grafs”. Arī šajā tekstā termins „grafs” nozīmē „neorientēts grafs”.



Zīm. 3.6. – neorientēta grafa piemērs.

Divas neorientēta grafa virsotnes v_1, v_2 sauksim par *blakusvirsotnēm (savienotām virsotnēm)*, ja $(v_1, v_2) \in E$, apzīmēsim to ar $v_1 \sim v_2$. Virsotnes v_1 un v_2 sauksim par šķautnes (v_1, v_2) *galapunktiem*.

Virsotni v un šķautni e sauksim par *incidentām*, ja viens no šķautnes e galapunktiem ir virsotne v. Divas šķautnes sauksim par incidentām, ja tām ir kopīga virsotne.

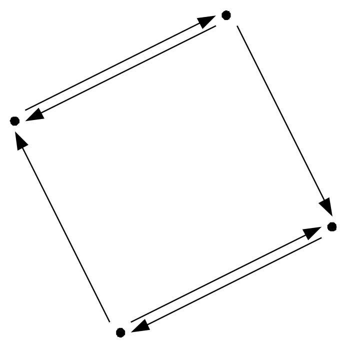
Risinot kombinatorikas uzdevumus par grafiem, parasti ar terminu „šķautne” saprot divu sakārtotu pāru (v_1, v_2) un (v_2, v_1) identifikāciju.

Par grafa Γ *šķautņu grafu* vai *līniju grafu* sauksim grafu $L(\Gamma)$, kur virsotnes ir Γ šķautnes un divas virsotnes grafā $L(\Gamma)$ ir savienotas tad un tikai tad, ja atbilstošās šķautnes ir incidentas.

Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma=(V,E)$, kur V - *orientēta grafa virsotņu* kopa, $V\neq\varnothing$ un $E\subseteq V\times V$, $E \cap diag(V\times V)=\varnothing$ - *orientēta grafa šķautņu* (bultu) kopa.

Atšķirība no neorientēta grafa ir tāda, ka šajā gadījumā netiek pieprasīta simetrija, tāpēc uz šķautnēm zīmē bultiņas, lai šķautnes (u,v) un (v,u) atšķirtu vienu no otras.

Šķautni (u,v) parasti sauc par virsotnes u *izejošo šķautni* un šķautni (v,u) - par *ieejošo šķautni*. Orientētam grafam atbilst patvaļīga antirefleksīva attieciba.



Zīm. 3.7. – orientēta grafa piemērs.

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu „aizmirstot" šķautņu orientāciju. Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

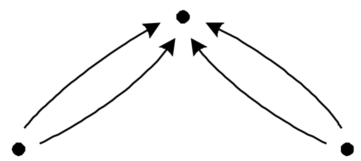
Par *orientētu grafu ar cilpām* sauksim pāri $\Gamma=(V,E)$, kur V - *grafa virsotņu* kopa, $V\neq\varnothing$ un $E\subseteq V\times V$ - *grafa šķautņu* kopa.

Orientētam grafam ar cilpām atbilst patvaļīga attiecība

Orientētus grafus var interpretēt arī kā attēlojumu grafus.

Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām. Šķautņu skaitu starp divām virsotnēm sauc arī par šķautnes *multiplicitāti*. Bieži vien multigrafiem ir dažādu tipu šķautnes, kuras zīmējumos var attēlot ar dažādām krāsām vai citiem paņēmieniem.

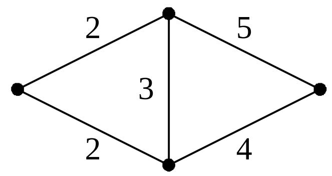
Multigrafu var domāt kā grafu ar papildus struktūru – funkciju no šķautņu kopas uz naturālu skaitļu kopu, kas katrai šķautnei piekārto tās multiplicitāti.



Zīm. 3.8. – orientēta multigrafa piemērs.

Par *nosvērtu grafu (grafu ar indeksētām virsotnēm un/vai šķautnēm)* sauksim grafu, kura katrai virsotnei vai/un šķautnei var būt piekārtots skaitlis vai vairāki skaitļi.

Formāli runājot, nosvērts grafs ir jebkura tipa grafs ar papildus struktūru – „svaru” funkciju $V \to R$ vai/un funkciju $E \to R$, kas katrai virsotnei/šķautnei piekārto kādu skaitli (*svaru*).



Zīm. 3.9. – nosvērta grafa piemērs.

No nosvērta grafa var iegūt parastu (orientētu vai neorientētu) grafu „aizmirstot” par svaru funkciju.

Grafa jēdzienu var vispārināt šādā veidā. Ja V ir netukšā kopa (virsotņu kopa) un $E \subseteq P(V)$, tad pāri X=(V,E) sauksim par *hipergrafu*. Tādējādi, hipergrafā „šķautnes” (kopas E elementi) atbilst virsotņu kopas patvaļīgām apakškopām. Šajā tekstā mēs hipergrafus sīkāk neapskatīsim.

Jebkura tipa divus grafus sauksim par *vienādiem*, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$ un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

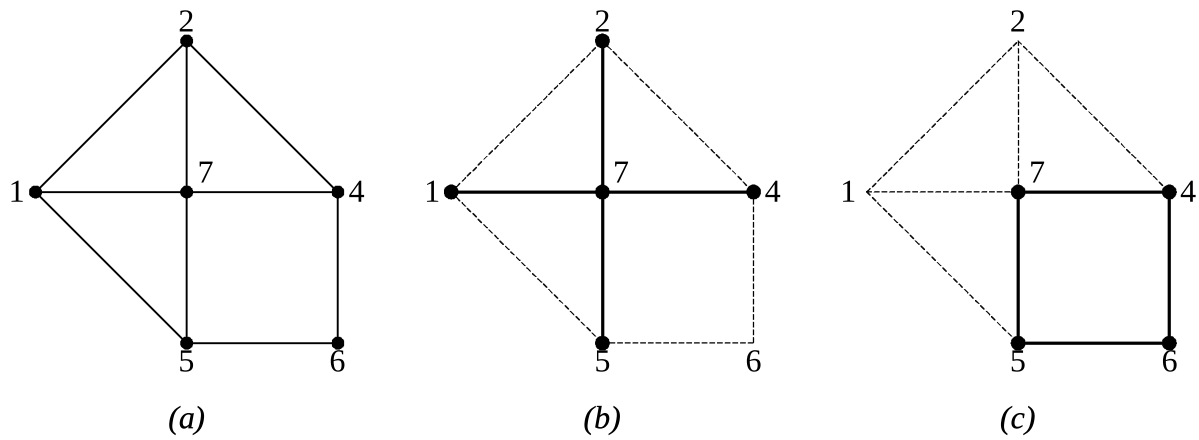
Par virsotņu kopas W *inducēto (pilno) apakšgrafs* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir W, un kas satur visas šķautnes, kas incidentas tikai tā virsotņu kopas W elementiem.

Par *skeletālu apakšgrafu* sauksim apakšgrafs, kas satur visas grafa virsotnes.

Grafu Γ sauksim par *maksimālu* attiecībā uz kādu īpašību P , ja tam piemīt īpašība P, bet neeksistē grafs Γ' tāds, ka $\Gamma \subseteq \Gamma'$ un grafam Γ' piemīt īpašība P.

Grafa apakšgrafu sauksim par *kliķi*, ja tajā jebkuras divas virsotnes ir savienotas. Grafa maksimālas kliķes virsotņu skaitu sauksim par grafa *kliķes skaitli*, to apzīmē ar $w(\Gamma)$.

PIEMĒRI Zīmējuma 3.10 (a) apakšgrafs ir (b) un pilns apakšgrafs – (c) .



Zīm. 3.10. – apakšgrafa un pilna apakšgrafa piemēri.

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_{\Gamma}(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne (u,v)/(v,u), šīs kopas apzīmē ar $N_{+}(v)$ vai $N_{-}(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_{-}(v)$ apzīmē arī ar $\Gamma(v)$ un kopu $N_{+}(v)$ - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *valenci (pakāpi)* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem, sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar d(v).

Par grafa *pakāpju vektoru* sauksim virkni $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, kur a_i ir grafa virsotņu skaits ar pakāpi i.

Naturālu skaitļu virkni sauksim par *grafisku*, ja eksistē grafs, kura pakāpju vektors ir vienāds ar doto virkni.

Virsotni, kuras pakāpe ir 0, sauksim par *izolētu* virsotni, virsotni, kuras pakāpe ir 1 sauksim par *brīvu* virsotni, virsotni, kas ir savienota ar visām pārējām virsotnēm, sauksim par *dominējošu*.

Grafa Γ virsotņu *minimālo pakāpi* apzīmēsim ar $d(\Gamma)$, *maksimālo pakāpi* – ar $\Delta(\Gamma)$. Par grafa *vidējo virsotnes* *pakāpi* sauksim lielumu $d(\Gamma) = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v)$. Definēsim $e(\Gamma) = \frac{|E|}{|V|}$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo valenci (puspakāpi)* sauksim ar to incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

Ja $d_+(v) = 0$, tad virsotni v sauksim par (orientēta grafa) *avotu*. Ja $d_-(v) = 0$, tad virsotni v sauksim par (orientēta grafa) *noteku*. Orientētu grafu, kuram ir tieši viens avots un tieši viena noteka, sauksim par *tīklu*.

TEORĒMA 3.1

1) Grafa virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šķautņu skaitu:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|; \qquad (3.1)$$

2) Orientētā grafā ir spēkā formula:

$$\sum_{v\in V} d_-(v) + \sum_{v\in V} d_+(v) = 2|E| \qquad (3.2)$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu „skaitīšana divos dažādos veidos”.

Neorientēta grafa gadījumā skaitīsim katras virsotnes incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm.

No vienas puses, mēs iegūsim $\sum_{v\in V} d(v)$, no otras puses, tā kā katrai šķautnei ir divi galapunkti, tad summā iegūsim lielumu 2|E|. Līdzīga sprieduma ceļā iegūsim arī apgalvojumu orientētam grafam. *QED*

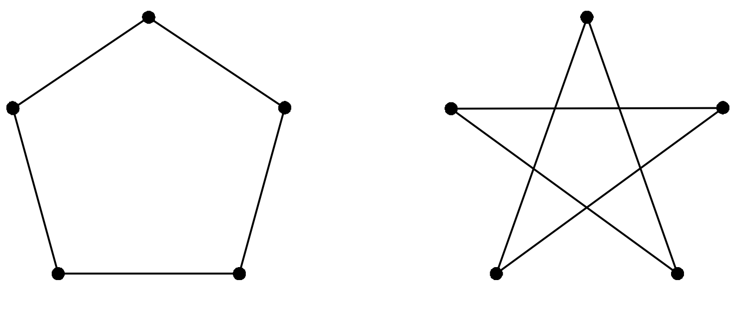
Par grafa $\Gamma = (V, E)$ *papildgrafu* jeb *papildinājumu* sauksim grafu

$$\overline{\Gamma} = (V, (V \times V) \setminus (E \cup diag(V \times V)).$$

Citiem vārdiem sakot, divas virsotnes ir savienotas grafā $\overline{\Gamma}$ tad un tikai tad, ja tās nav savienotas grafā Γ.

Papildgrafa maksimālas kliķes virsotņu skaitu sauksim par grafa *neatkarības skaitli* un apzīmēsim ar $a(\Gamma)$.

PIEMĒRS Zīmējuma 3.11 (a) papildgrafs ir (b).



(a) *(b)*

Zīm. 3.11. – grafa un tā papildgrafa piemērs.

Ja mēs domājam par grafu kā par transporta vai sazināšanās tīkla modeli, mums ir jādefinē vienkāršākie jēdzienu, kas ir saistīti ar pārejām starp virsotnēm:

1) par *maršrutu* grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n)$, tādu, ka jebkuras divas kaimiņu virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar šķautni e_{i+1}. Ja maršrutā $v_0 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *noslēgtu*, pretējā gadījumā – par *vaļēju*, šķautņu skaitu maršrutā sauksim par tā *garumu*;

2) maršrutu, kurā visas šķautnes ir dažādas, sauksim par *ķēdi;*

3) ķēdi, kurā visas virsotnes izņemot, iespējams, pirmo un pēdējo, ir dažādas, sauksim par *vienkāršu ķēdi*;

4) slēgtu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *ciklu*, slēgtu vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *vienkāršu ciklu*.

Par vienkāršu ķēdi vai vienkāršu ciklu ir lietderīgi domāt kā par grafa apakšgrafu, kas satur atbilstošās virsotnes un šķautnes starp virsotnēm vai arī kā par atbilstošo šķautņu kopu, jo vienkāršu ķēdi vai vienkāršu ciklu var atjaunot, ja ir zināma tā šķautņu kopa. Vienkāršu ķēdi var atjaunot arī tad, ja ir zināma tikai tā virsotņu kopa.

Par grafa *šaurumu* sauksim minimāla vienkārša cikla virsotņu skaitu. Ciklu ar garumu 3 sauksim par *trijstūri*.

Ciklam nepiederošu šķautni, kas savieno divas cikla virsotnes sauksim par cikla hordu. *Inducēts vienkāršs cikls* ir vienkāršs cikls bez hordām.

Viegli redzēt, ka katrs (v,w)-maršruts satur apakšmaršrutu, kas ir vienkārša (v,w)-ķēde un katrs cikls satur apakšmaršrutu, kas ir vienkāršs cikls.

Zinot grafa minimālo virsotnes pakāpi, var no apakšas novērtēt vienkāršas ķēdes un vienkārša cikla maksimālo garumu grafā izmantojot šādu teorēmu.

TEORĒMA Ja $d(\Gamma)\geq 2$, tad grafā Γ eksistē vienkārša ķēde ar garumu $d(\Gamma)$ un vienkāršs cikls ar garumu $d(\Gamma)+1$.
PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka garākās ķēdes garums ir k un tai atbilstošā virsotņu virkne ir $(v_0,...,v_k)$. Visas virsotnes v_k blakusvirsotnes pieder šai virknei, tāpēc $k\geq d(\Gamma)$, un apgalvojums par ķēdi ir pierādīts. Pieņemsim, ka indekss i, $0\leq i<k$, ir minimālais indekss ar īpašību $v_i \sim v_k$, var redzēt, ka $i\leq k-d(\Gamma)$. Virsotņu virkne $(v_i,v_{i+1}...,v_k,v_i)$ atbilst ciklam ar garumu l=k-i+1 un $l\geq d(\Gamma)+1$. QED

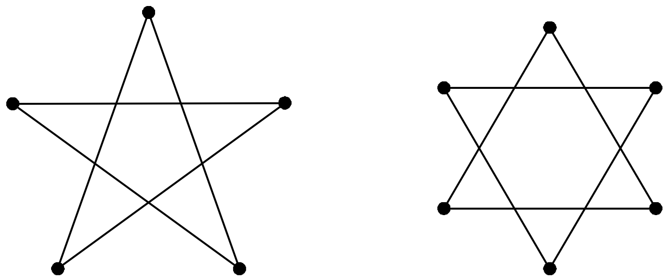
Analoģiski šos jēdzienus definē orientētiem grafiem.

Par *virzītu maršrutu* orientētā grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, v_1, ..., v_n)$, tādu, ka jebkuras divas virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar (orientēto) šķautni e_{i+1}. Ja orientētā maršrutā $v_1 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *slēgtu virzītu maršrutu*, pretējā gadījumā – par *atvērtu*. Līdzīgā veidā definēsim arī virzītu ķēdi, vienkāršu ķēdi, ciklu un vienkāršu ķēdi.

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē maršruts starp jebkurām divām virsotnēm. Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauc par grafa *sakarīgo komponenti*.

Viegli redzēt, ka grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, ja eksistē virsotne u, tāda, ka jebkurai citai virsotnei v eksistē maršruts (u,...,v).

PIEMĒRS Zīmējuma 3.12 (a) grafs ir sakarīgs un (b) grafs nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



(a) *(b)*

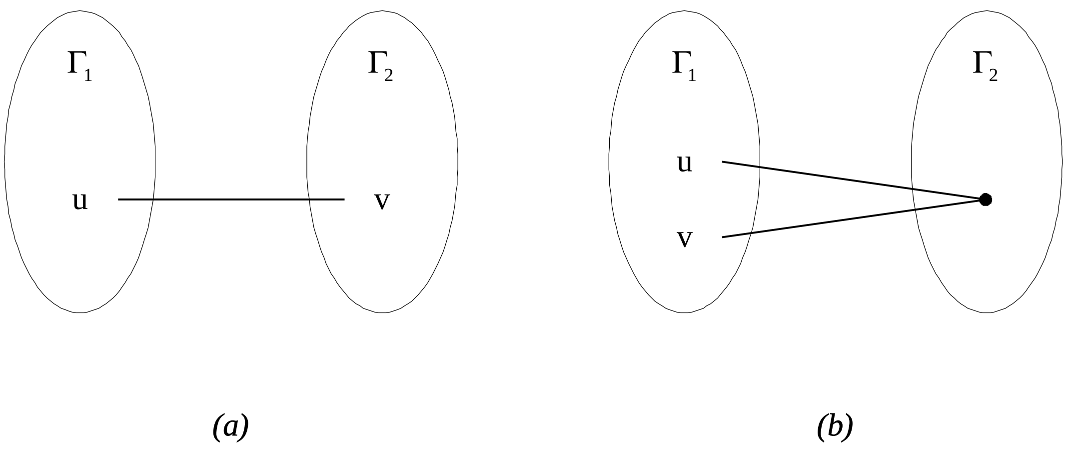
Zīm. 3.12. – sakarīga un nesakarīga grafa piemērs.

TEORĒMA 3.2 Grafs ar n virsotnēm un mazāk kā n-1 šķautni nav sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim grafā kādu virsotni v. Ja grafs ir sakarīgs, tad eksistē ķēde no v līdz jebkurai no pārējām n-1 virsotnēm. Jebkuras divas šādas ķēdes atšķiras ar vismaz vienu šķautni, tātad grafā ir vismaz n-1 šķautne. *QED*.

TEORĒMA 3.3 Ja grafs nav sakarīgs, tad tā papildgrafs ir sakarīgs

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs Γ nav sakarīgs, tad tam eksistē vismaz divas komponentes Γ_1 un Γ_2. Mums ir jāpierāda, ka jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi papildgrafā $\overline{\Gamma}$. Ja virsotnes pieder dažādām komponentēm, tad papildgrafā tās var savienot ar vienu šķautni vai, citiem vārdiem sakot, eksistē šīs virsotnes savienojoša ķēde ar garumu 1 (skatīt Zīm. 3.13 (a)).



Zīm. 3.13. – ilustrācija Teorēmas 3.3. pierādījumam.

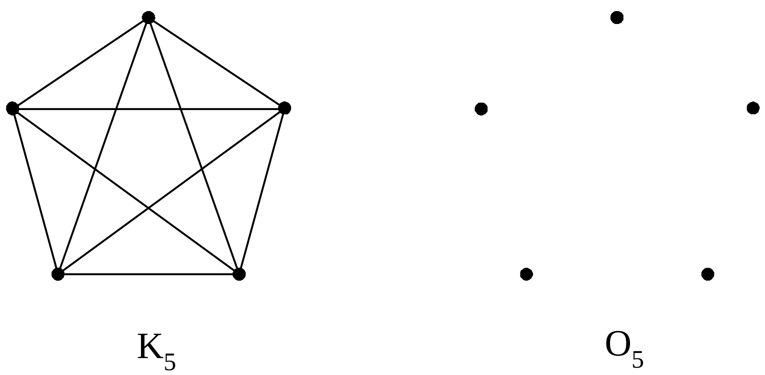
Ja abas virsotnes pieder vienai komponentei, tad tās papildgrafā var savienot ar divām šķautnēm, tātad eksistē šīs virsotnes savienojoša ķēde ar garumu 2 (skatīt Zīm.3.13. (b)). *QED*

SPECIĀLAS GRAFU KLASES

Apskatīsim dažas speciālas grafu klases vai grafus. Grafu speciālgadījumus var izmantot pieņēmumu pārbaudei vai atspēkošanai.

Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi pāri savā starpā ir savienoti.

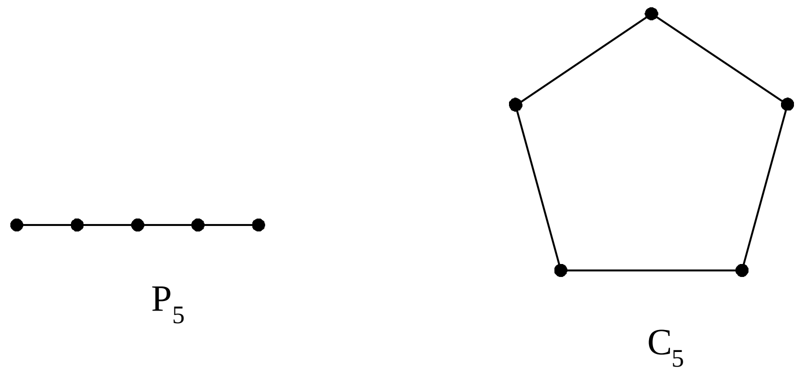
Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



Zīm. 3.14. – pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri.

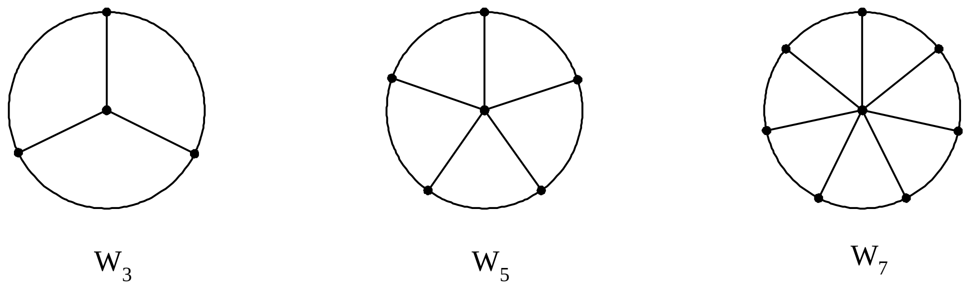
Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar *n* virsotnēm, kura divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām virsotnēm pakāpe ir 2.

Cikls C_n - sakarīgs grafs ar *n* virsotnēm, kura katrai virsotnei pakāpe ir 2:



Zīm. 3.15. – ķēdes un cikla piemēri.

Ritenis W_n - sakarīgs grafs ar *n+1* virsotni, kura vienai virsotnei ir pakāpe *n* un pārējām - *3*:



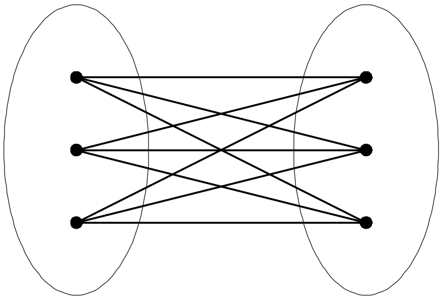
Zīm. 3.16.- riteņu piemēri.

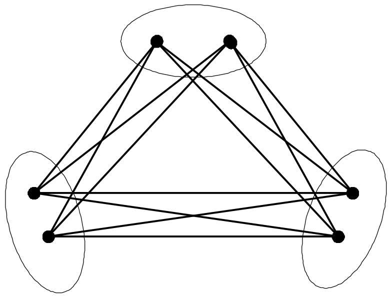
Divdaļīgs grafs – grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns divdaļīgs grafs $K_{n,m}$ - divdaļīgs grafs, kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.

m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt *m* daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

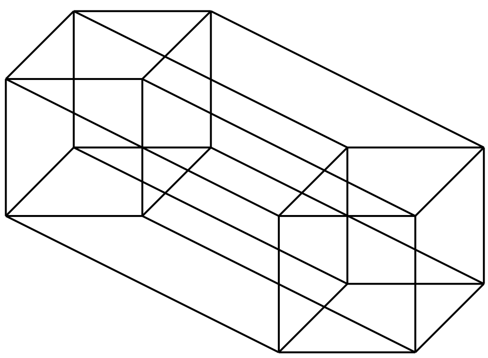
Pilns m-daļīgs grafs $K_{n_1,n_2,...,n_m}$ - *m*- daļīgs grafs, kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas:





Zīm. 3.17. – 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri.

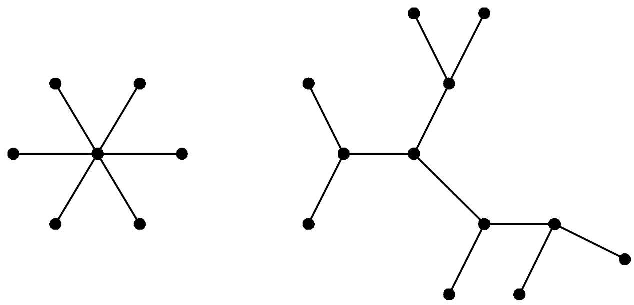
Hiperkubs H_n – virsotnes ir visas *n* vienības garas bināras virknes, divas virsotnes savienotas tad, ja tās atšķiras vienā vietā:



Zīm. 3.18. – hiperkubs H_4

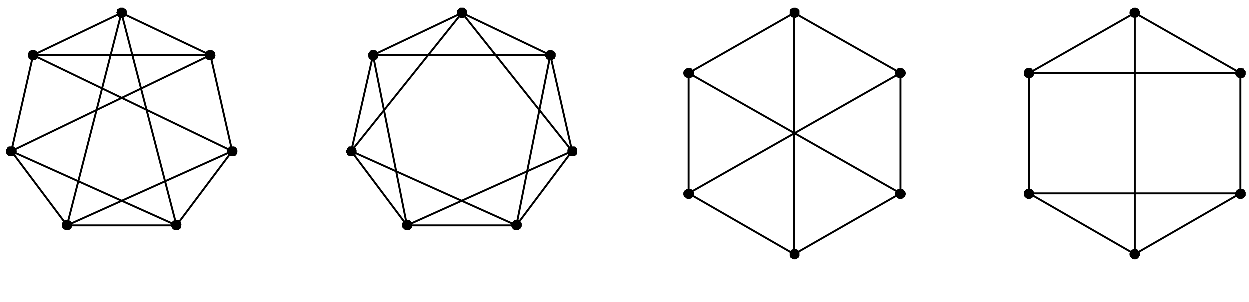
Koks – sakarīgs grafs bez inducētiem apakšgrafiem, kas ir cikli (sakarīgs *aciklisks* grafs).

Mežs – grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs):



Zīm. 3.19. – mežs.

Regulārs grafs – grafs, kurā visām virsotnēm ir vienāda pakāpe. Ja regulāra grafa virsotnes pakāpe ir k, tad to sauc par k-regulāru grafu. Katram pietiekoši lielam n eksistē vairāki sakarīgu regulāru grafu tipi, un to skaits pieaug, ja n tiecas uz bezgalību. Pašreiz (2005.gads) ir atrasti visi regulārie grafi, ja virsotņu skaits nepārsniedz apmēram 20. Katram n atbilstošais cikls C_n un pilnais grafs K_n ir regulāri grafi.



Zīm. 3.20. – 3-regulāru grafu piemēri ar 6 un 7 virsotnēm.

Pierādīsim kādu teorēmu par regulāru grafu eksistenci, kurā tiek izmantota veselo skaitļu teorija.

TEORĒMA Ja ir doti divi naturāli dažādas paritātes skaitļi n un k, tādi, ka k<n, tad eksistē k-regulārs grafs ar n virsotnēm.

PIERĀDĪJUMS Apskatīsim atlikumu kopu pēc moduļa n, kuru mēs identificēsim ar kopu Z_n ={0,1,...,n-1}. Šajā kopā var definēt atlikumu saskaitīšanas operāciju, attiecībā uz kuru kopa Z_n ir komutatīva grupa. Fiksēsim apakškopu $S_k \subseteq Z_n$ ar šādām īpašību:

1) ja $x \in S_k$, tad $((-x) \bmod n) \in S_k$,;

2) $|S_k| = k$;

3) $0 \notin S_k$.

Šādas apakškopas eksistē.

Tiešām, ja n ir pāra skaitlis un k ir nepāra skaitlis, tad S_k var ņemt vienādu ar kopu $\{\pm 1, ..., \pm \frac{k-1}{2}, \frac{n}{2}\}$.

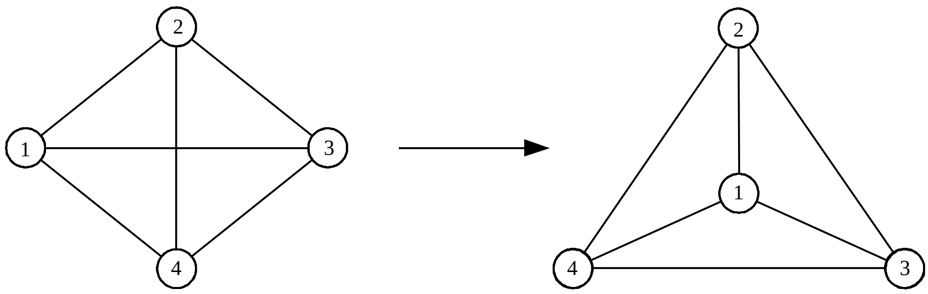
Ja n ir nepāra skaitlis un k ir pāra skaitlis, tad S_k var ņemt vienādu ar kopu $\{\pm 1, ..., \pm \frac{k}{2}\}$.

Kopas S_k definīcijās visur tiek ņemti atlikumu klašu pārstāvji kopā Z_n.

Definēsim kopā Z_n šādu attiecību: $x \sim y$ tad un tikai tad, ja $((x-y) \bmod n) \in S_k$. Var redzēt, ka šī attiecība ir antirefleksīva un simetriska, tātad tā definē grafu Γ. Tā kā atlikumu saskaitīšana ir grupa operācija, tad Γ ir regulārs ar virsotņu pakāpi k. QED.

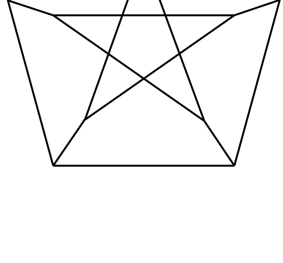
Plakans grafs – grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs – grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu:



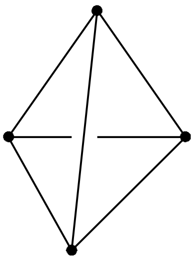
Zīm. 3.21. – planāra grafa plakanizācijas piemērs.

Ir atrasti un pētīti vairāki interesanti grafi, kas ir nosaukti to atklājēju vārdā. Populārākais no grafiem ar nelielu virsotņu skaitu ir *Petersena grafs*, kurš tā ir nosaukts par godu dāņu matemātiķim Petersenam, kurš to atklāja 1898.gadā.

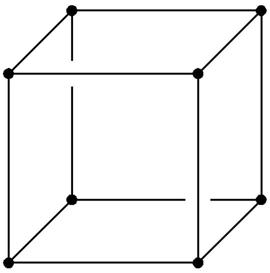


Zīm. 3.22. – Petersena grafs.

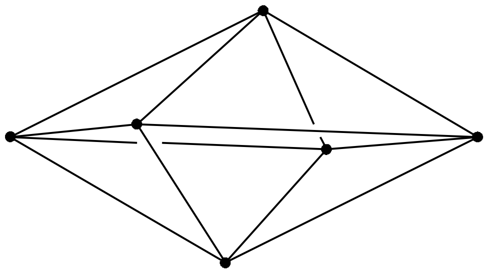
Interesanta simetrisku grafu klase ir grafi, kas atbilst daudzskaldņiem ar regulārām īpašībām. *Regulāro daudzskaldņu grafi* tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), katram no kuriem atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



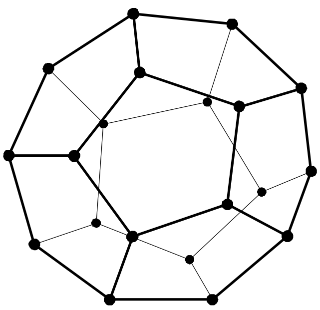
Tetraedra grafs



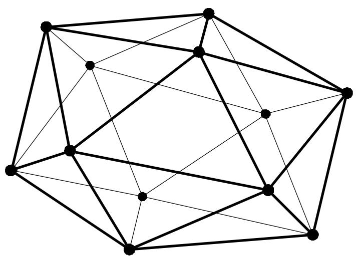
Kuba grafs



Oktaedra grafs



Dodekaedra grafs



Ikosaedra grafs

Zīm. 3.23. – Platona figūru grafi.