RACIONĀLĀS, ALGEBRISKĀS UN EKSPONENCIĀLĀS VEIDOTĀJFUNKCIJAS

Racionālās veidotājfunkcijas

Veidotājfunkciju A(x) sauksim par *racionālu veidotājfunkciju*, ja to var izteikt kā divu polinomu attiecību: $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, kur $Q(0)\neq 0$.

***TEORĒMA 2.5** (fundamentālā teorēma par racionālajām veidotājfunkcijām)* Pieņemsim, ka ir doti kompleksi skaitļi $q_0, q_1, ..., q_{m-1}, q_m$ un kompleksu skaitļu virkne $\{a_n\}_{n\geq 0}$ Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)}$,

kur $Q(x)=q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1}+...+q_1 x + q_0$, $P(x)\in C[x]$, deg(P)<deg(Q)=m;

2) visiem $k\geq m$ izpildās lineāra rekurentā sakarība $a_k q_0 + a_{k-1}q_1 + ... + a_{k-m}q_m = \sum_{j=0}^{m} a_{k-j}q_j = 0$;

3) visiem $n\geq 0$ izpildās sakarība $a_n=\sum_{i=1}^{k}\frac{P_i(n)}{l_i^n}$, kur dažādie skaitļi l_1 tiek definēti saskaņā ar vienādību $q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1}+...+q_0 = q_m\prod_{i=1}^{k}(x-l_i)^{m_i}$, $\deg(P_i)<m_i$.

PIERĀDĪJUMS Īsta daļveida racionāla funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ virs komplekso skaitļu lauka ir izsakāma parciāldaļu summas veidā: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{c_{ij}}{(x-l_i)^j}$, kur visi kompleksie skaitļi l_1 ir dažādi. Izvirzīsim parciāldaļu $\frac{1}{(x-l)^k}$ Teilora rindā ap punktu 0:

$$\frac{1}{(x-l)^k}=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{x-l}\right)^{(k-1)}=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(-\frac{1}{l}\right)\left(\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{l^n}\right)^{(k-1)}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{l(k-1)!}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{l^n}n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)x^{n-k+1}=\frac{(-1)^k}{l^k(k-1)!}\sum_{n\ge 0}\frac{A_{n+k-1}^{k-1}}{l^n}x^n.$$

Redzam, ka

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{c_{ij}}{(x-l_i)^j}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\frac{(-1)^j}{l_i^j}\sum_{n\ge 0}\frac{A_{n+j-1}^{j-1}}{l_i^n}x^n=$$

$$=\sum_{n\ge 0}x^n\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{l_i^n}\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}\frac{(-1)^j}{l_i^j}A_{n+j-1}^{j-1}=\sum_{n\ge 0}x^n\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{l_i^n}P_i(n),$$

kur visas funkcijas $P_i(n)$ ir polinomi, un $\deg(P_i)<m_i$. Salīdzinot veidotājfunkcijas koeficientus redzam, ka šie aprēķini pierāda teorēmas apgalvojumu 1) un 3) ekvivalenci.

Pieņemsim, ka $\sum_{n\ge 0}a_nx^n=\frac{P(x)}{Q(x)}$, kur $Q(x)=q_mx^m+q_{m-1}x^{m-1}+\ldots+q_1x+q_0$ un deg(P)<m.

Formāli reizinot abas puses ar saucēju, iegūsim $Q(x)\cdot\sum_{n\geq 0} a_n x^n = P(x)$. Pārveidojot iegūsim

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n (q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{i=0}^{m} q_i x^i = \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{m} a_n q_i x^{n+i} =$$
$$= \sum_{n\geq m} x^n \sum_{j=0}^{m} a_{n-j} q_j + \sum_{n=0}^{m-1} x^n \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} q_j .$$

Tā kā deg(P)<m, tad visiem $k \geq m$ izpildās sakarība $\sum_{j=0}^{m} a_{k-j} q_j = 0$. Otrādi, ja izpildās šāda rekurenta sakarība, tad, izmantojot lineāru rekurento sakarību risināšanas metodi, var parādīt, ka izpildās apgalvojjums 3). *QED*

Pēc būtības fundamentālā teorēma par racionālajām veidotājfunkcijām izsaka to, ka racionālās veidotājfunkcijas ir tieši tās veidotājfunkcijas, kas atbilst lineāru rekurentu sakarību atrisinājumiem, ignorējot galīgu skaitu noviržu no rekurentās sakarības, kuras var rasties, ja racionālā veidotājfunkcija nav īsta (skaitītāja pakāpe nav mazāka kā saucēja pakāpe) un tai eksistē netriviāls sadalījums polinoma un īstas daļveida racionālas funkcijas summā.

PIEMĒRS *Fibonači virkne* tiek definēta šādā veidā: $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, ..., a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Definēsim $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Salīdzināsim veidotājfunkcijas F(x), xF(x) un $x^2 F(x)$. Var ievērot, ka $F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x)$, atrisinot šo vienādojumu attiecībā uz F(x) iegūstam $F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$, tālāk izvirzām Teilora rindā un atrodam atbildi:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \qquad (2.30)$$

PIEMĒRS Izmantojot racionālas veidotājfunkcijas atrisināsim nehomogēnu lineāru otrās kārtas rekurentu sakarību $a_n=2a_{n-1}+1,\ a_0=0,\ n\geq 0$.

Reizināsim abas puses ar x^n un formāli summēsim no 1 līdz ∞: $\sum_{n\geq 1}a_nx^n=2\sum_{n\geq 1}a_{n-1}x^n+\sum_{n\geq 1}x^n$.

Apzīmējot meklējamās virknes veidotājfunkciju ar A(x), iegūsim sakarību

$$A(x)=2xA(x)+\frac{x}{1-x}.$$

Atrisinot šo sakarību attiecībā uz A(x) iegūsim, ka

$$A(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Šajā gadījumā ir lietderīgi sadalīt atrasto racionālo funkciju parciāldaļu summā un izteikt atbildi kā parciāldaļu koeficientu summu:

$$A(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}(2x)^n-\sum_{n\geq 0}x^n=\sum_{n\geq 0}(2^n-1)x^n,$$

tātad $a_n = 2^n - 1$.

Algebriskās veidotājfunkcijas

Veidotājfunkciju $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sauksim par *algebrisku*, ja eksistē divu argumentu polinoms R(u,v), kurš nav identiski vienāds ar 0 un izpildās sakarība

$$R(x,A(x))=0.$$

(polinomiāla sakarība, kas saista x un A(x)).

Viegli redzēt, ka jebkura racionāla veidotājfunkcija ir algebriska, jo veidotājfunkcija $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ apmierina polinomiālu sakarību $Q(x)A(x) - P(x) = 0$.

TEORĒMA 2.6 Ja veidotājfunkcija $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ir algebriska, tad eksistē naturāls skaitlis m un polinomi $P_1(x),...,P_m(x)$ tādi, ka visiem naturāliem n izpildās sakarība

$$P_m(n) a_{n+m} + P_{m-1}(n) a_{n+m-1} + ... + P_0(n) a_n = 0. \qquad (2.31)$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka veidotājfunkcija $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ apmierina polinomiālu sakarību $R(x, A(x)) = 0$. Atvasināsim šīs vienādības abas puses uzskatot R par divu argumentu funkciju R(x,y):

$$R_x'(x, A(x)) + A'(x) R_y'(x, A(x)) = 0.$$

Iegūstam, ka $A'(x) = -\frac{R_x^{'}(x, A(x))}{R_y^{'}(x, A(x))}$ ir racionāla funkcija no x un A(x). Līdzīgā veidā var parādīt, ka visi veidotājfunkcijas A(x) atvasinājumi ir racionālas funkcijas no x un A(x).

Izmantosim faktu no lineārās algebras, kuru lasītājam ir jāpieņem bez pierādījuma: ja funkcija A(x) apmierina polinomiālu sakarību, tad visu racionālo funkciju no x un A(x) kopas kā lineāras telpas virs visu racionālu funkciju lauka ir galīga - $\dim_{C(x)} C(x, A(x)) < \infty$.

No šī fakta seko, ka visu A(x) atvasinājumu kopa $\{A^{(k)}(x)\}_{k\geq 0}$ ir galīgi dimensionāla virs racionālo funkciju lauka un eksistē lineāra sakarība ar racionālu funkciju koeficientiem, kas saista šīs funkcijas.

Reizinot šādu lineāru sakarību ar kopsaucēju un salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm iegūsim sakarību (2.31). *QED*

Virknes, kas apmierina (2.31) tipa rekurentas sakarības, sauc par *polinomiāli rekursīvām* jeb *P-rekursīvām.*

PIEMĒRS *Katalāna skaitļi.* Cik veidos var pareizi salikt iekavas virknē, kas satur n elementus, pielietojot bināru operāciju n-1 reizi, piemēram, rēķinot n skaitļu summu, ja iekavas apzīmē divu skaitļu saskaitīšanu? Ja n=4, tad ir pieci veidi:

$$\begin{gathered}(((x+y)+z)+t)\\(x+(y+(z+t)))\\((x+y)+(z+t))\\((x+(y+z))+t)\\((x+((y+z)+t))\end{gathered}.$$

Katram n apzīmēsim šo variantu skaitu ar C_n. Viegli redzēt, ka $C_2=1, C_3=2, C_4=5$. Definēsim $C_0=0,\ C_1=1$. Apskatīsim stāvokli pirms pēdējās saskaitīšanas – jebkura summa, kad visas iekavas, izņemot pēdējo pāri, ir saliktas, ir izsakāma formā S_1+S_2, kur katrā no summām visas iekavas ir saliktas. Tas nozīmē, ka virkne tiek sadalīta divās daļās:

$$(\underbrace{x_1+\dots+x_k}_{S_1})+(\underbrace{x_{k+1}+\dots+x_n}_{S_2})$$

(katrā no daļām kaut kā ir saliktas iekavas). Šai konkrētai k vērtībai kopējais variantu skaits ir C_kC_{n-k}, jo katrā no summām var neatkarīgi vienā no otras iekavas salikt C_k un C_{n-k} veidos. Skaitot kopā iespējas visām k vērtībām, iegūstam rekurentu sakarību (ja $n\geq 2$):

$$C_n=C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+C_3C_{n-3}+\dots+C_{n-1}C_1=\sum_{k=1}^{n-1}C_kC_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}.$$

Apskatīsim arī dažus speciālgadījumus mēģinot uzminēt, kādu sakarību varētu apmierināt veidotājfunkcija:

$$C_3 = C_1C_2 + C_2C_1 = C_1C_2 + C_2C_1 + \underbrace{C_0C_3 + C_3C_0}_{=0+0=0}, \quad C_4 = C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + \underbrace{C_0C_4 + C_4C_0}_{=0+0=0}$$

Apskatīsim atbilstošo veidotājfunkciju $C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$.

Salīdzināsim veidotājfunkcijas C(x) un $C^2(x)$. Redzam, ka ja $n \geq 2$, tad koeficients pie x^n veidotājfunkcijā C(x) ir vienāds ar to pašu koeficientu veidotājfunkcijā $C^2(x)$. Lai iegūtu C(x), pie $C^2(x)$ ir jāpieskaita lineārais loceklis ar koeficientu 1, jo $C_1 = 1$.

Iegūstam vienādojumu $C(x) = x + C^2(x)$, kuru atrisinot attiecībā uz C(x) iegūstam $C(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x})$. Tā kā $C_0 = 0$, tad mums ir jāņem „mīnus” zīme. Tālāk izvirzām Teilora rindā un iegūstam, ka

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} . \qquad (2.32)$$

Var arī ievērot, ka pareizo iekavu salikšanas veidu kombinatoriskā klase C apmierina rekursīvu specifikācijas $C \cong Z + C^2$ vai $C \cong Z \times S(C)$, no kurām seko kvadrātiskas sakarības veidotājfunkcijām.

PIEMĒRS *Šrēdera skaitļi.* Vispārināsim uzdevumu par Katalāna skaitļiem šādā veidā. Skaitīsim, cik veidos var pareizi salikt iekavas n elementu virknē, ja katrs iekavu pāris nozīmē operāciju ar patvaļīgu operandu skaitu, lielāku kā 2. Varam uzskatīt, ka visi n elementi ir vienādi ar a.

Formāli varam definēt pareizu iekavu salikšanas veidu kā vārdu alfabētā {a,(,)} šādi:

1) (a) ir pareizs iekavu salikšanas veids (turpmāk iekavas ap a neuzrādīsim);
2) ja vārdi $A_1,\ldots,A_k$ ir pareizi iekavu salikšanas veidi, tad vārds $(A_1\ldots A_k)$ arī ir pareizs iekavu salikšanas veids.

Ja n=4, tad eksistē 11 pareizi iekavu salikšanas veidi: (((aa)a)a), (a(a(aa))), ((a(aa))a), (a((aa)a)), ((aa)(aa)), ((aa)aa), (a(aa)a), (aa(aa)), ((aaa)a), (a(aaa)), (aaaa).

Apzīmēsim pareizu iekavu salikšanas veidu skaitu n elementu virknei ar s_n. Definēsim $s_1 = 1, s_0 = 0$. Definēsim atbilstošo veidotājfunkciju $S(x) = \sum_{n\geq 0} s_n x^n$. Spriežot līdzīgi kā Katalāna skaitļu gadījumā, iegūstam, ka S(x) apmierina vienādojumu

$$S(x) = x + S^2(x) + S^3(x) + \ldots = x + S^2(x)(1 + S(x) + S^2(x) + \ldots) = x + \frac{S^2(x)}{1 - S(x)},$$

kuru var pārveidot formā $2S^2(x) + S(x)(-x-1) + x = 0$, kas ir kvadrātisks vienādojums attiecībā uz S(x). Citiem vārdiem sakot, visu pareizo iekavu salikšanas veidu kombinatoriskā klase S apmierina rekursīvu specifikāciju $S = Z + S_{\geq 2}(S)$, no kuras seko kvadrātiska sakarība veidotājfunkcijai.

Sengrieķu vēsturnieka Plutarha darbā, kas publicēts ap 100.g pēc Kristus, ir minēts, ka astronoms un matemātiķis Hiparhs, kas dzīvoja ap 200.g pirms Kristus, ir atrisinājis divus loģikas uzdevumu, kuru atbildes ir 103049 un 310952. Līdz pat 20.gs 90.gadu beigām speciālisti šos skaitļus nevarēja izskaidrot. 1996.gadā tika ievērots, ka $103049 = s_{10}$ un $310952 = \frac{s_{10} + s_{11}}{2} - 2$ un tika atrastas šo loģikas uzdevumu iespējamās interpretācijas. Neatrisināts paliek jautājums par metodēm, ar kurām Hiparhs atrisināja šos uzdevumus. Šis gadījums rāda, ka zināšanu apjoms, kas bija uzkrāts antīkajā pasaulē un kas gāja bojā kopā ar to, bija dažos virzienos samērojams ar mūsdienu zinātnes sasniegumiem.

EKSPONENCIĀLĀS VEIDOTĀJFUNKCIJAS

Eksponenciālās veidotājfunkcijas var tikt pielietotas, ja uzdevums ir saistīts ar permutāciju skaita atrašanu, tas ir, uzdevumos, kur elementu kārtība virknēs ir svarīga. Viegli ievērot, ka izpildās sakarība

$$\frac{x^m}{m!} \cdot \frac{x^n}{n!} = C_{m+n}^m \frac{x^{m+n}}{(m+n)!}.$$

Tātad, ja ir dotas divas virknes a_n un b_n, kas skaita A tipa un B tipa objektus, kurus var izveidot no n elementus lielas kopas, ja šo virkņu eksponenciālas veidotājfunkcijas ir $A_{\exp}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ un $B_{\exp}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n$, tad to reizinājums

$$A_{\exp}(x)B_{\exp}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i a_i b_{n-i}$$

ir eksponenciālā veidotājfunkcija sakārtotiem objektu pāriem (A,B). Tiešām, lai konstruētu pāri (A,B) ar kopējo lielumu n, mums ir jāizvēlas indekss i, i elementus liela apakškopa no n elementus lielas kopas (to var izdarīt C_n^i veidos), A tipa objekts, ko var izveidot no šiem i elementiem (to var izdarīt a_n veidos) un B tipa objekts, ko var izveidot no atlikušajiem n-i elementiem (to var izdarīt b_{n-i} veidos), ir jāizmanto reizināšanas un summas likumi.

PIEMĒRS Eksponenciālā veidotājfunkcija netukšu kopu skaitam kā funkcijai no elementu skaita ir $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}=e^x-1$, jo katram n>0 atbilst viena kopa, ja ir doti kopas elementi, piemēram, skaitļi no 1 līdz n.

PIEMĒRS Atradīsim eksponenciālo veidotājfunkciju n elementu kopas sadalījumu skaitam divu netukšu apakškopu virknē.

Saskaņā ar augstāk aprakstīto novērojumu šī eksponenciālā veidotājfunkcija ir vienāda ar

$(e^x-1)^2=\sum_{n=2}^{\infty}(2^n-2)\frac{x^n}{n!}$.

Šo rezultātu var pārbaudīt arī neatkarīgi – n elementu kopas sadalījumu divu netukšu apakškopu virknē pilnīgi nosaka šī sadalījuma pirmais elements, kas ir īsta netukša apakškopa. Šādu apakškopu skaits ir 2^n-2 (visas n elementus lielas kopas apakškopas mīnus tukšā apakškopa un pati kopa). Visu kopas sadalījumu netukšu apakškopu virknēs skaita eksponenciālā veidotājfunkcija ir

$$\sum_{k\geq 0}(e^x-1)^k=\frac{1}{1-(e^x-1)}=\frac{1}{2-e^x}.$$

Vispārināsim minēto novērojumu. Zemāk dotajās teorēmās 2.7 – 2.10 apzīmējumu ērtuma dēļ definēsim virknes kā funkcijas no nenegatīva vesela argumenta, piemēram, $a_n=a(n)$.

TEORĒMA 2.7 Ir dotas divas virknes $a(n), n\geq 0$ un $b(n), n\geq 0$, definēsim jaunu virkni c(n) ar šādu nosacījumu:

$$c(|X|)=\sum_{(Y,Z)}a(|Y|)\cdot b(|Z|), \qquad (2.33)$$

kur kopa X ir galīga un summēšana tiek veikta pa visiem kopas X sakārtotiem sadalījumiem (Y,Z), citiem vārdiem sakot, $Y\cup Z=X, Y\cap Z=\varnothing$. Tad izpildās sakarība $C_{\exp}(x)=A_{\exp}(x)B_{\exp}(x)$.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka |X|=n, tad $c(n)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a(i)b(n-i)$, jo eksistē C_n^i dažādi pāri (Y,Z), tādi, ka |Y|=i. Redzam, ka c(n) ir koeficients pie $\frac{x^n}{n!}$ pakāpju rindai $A_{\exp}(x)B_{\exp}(x)$. *QED*

PIEMĒRS Cik dažādos veidos var izvēlēties n elementus lielas kopas sadalījumu divās daļās, pirmās daļas apakškopu un sakārtotu dažādu elementu pāri otrajā daļā?

Šajā gadījumā $a(n) = 2^n$ un b(n)=n(n-1), tāpēc $A_{\exp}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^n}{n!} = e^{2x}$ un $B_{\exp}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = x^2 e^x$.

Saskaņā ar Teorēmu 2.7 iegūstam, ka uzdevuma atrisinājuma eksponenciālā veidotājfunkcija ir vienāda ar $x^2 e^{3x} = \sum_{n\geq 0} n(n-1)3^n \frac{x^n}{n!}$, tāpēc atbilde ir vienāda ar $n(n-1)3^n$.

TEORĒMA 2.8 Ir dotas k virknes $a_1(n),..., a_k(n), n \geq 0$, definēsim jaunu virkni c(n) ar šādu nosacījumu:

$$c(|X|) = \sum_{(Y_1,...,Y_k)} a_1(|Y_1|)\cdot ... \cdot a_k(|Y_k|), \tag{2.34}$$

kur kopa X ir galīga un netukša, un summēšana tiek veikta pa visiem kopas X sakārtotiem sadalījumiem netukšās apakškopās $(Y_1,...,Y_k)$, citiem vārdiem sakot, $\bigcup_{i=1}^{k} Y_i = X$, $Y_i \cap Y_k = \varnothing$. Tad izpildās sakarība $C_{\exp}(x) = A_{1,\exp}(x)\cdot ... \cdot A_{1,\exp}(x)$.

PIERĀDĪJUMS Šo faktu var pierādīt atkārtoti pielietojot Teorēmu 2.7. *QED*

PIEMĒRS Atrisināsim uzdevumu par variācijām bez atkārtojumiem izmantojot eksponenciālās veidotājfunkcijas – cik veidos var izvēlēties m elementus garu virkni no n elementus lielas kopas?

Izmantosim Teorēmu 2.8. Ja virknes $a_1(n),...,a_n(n)$ tiek definētas ar nosacījumu $a_1(i)=\begin{cases} 0, & ja \ i>1 \\ 1, & ja \ 0\le i\le 1\end{cases}$, tad virkne c(i), kas definēta ar nosacījumu (2.34), kur k=n, izsaka sakārtotu virkņu skaitu ar garumu i. Saskaņā ar Teorēmu 2.8 iegūstam, ka $C_{\exp}(x)=(1+x)^n$ un sakārtot virkņu skaits ar garumu m ir vienāds ar $C_n^m \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}$.

PIEMĒRS Cik dažādas 5 vienības garas virknes (vārdus) var izveidot no vārda KOMBINATORIKA burtiem?

Izmantojot Teorēmu 2.8 iegūsim atrisinājumam atbilstošo eksponenciālo veidotājfunkciju $(1+x)^5(1+x+\frac{x^2}{2!})^4$ un atrisinājums ir šī polinoma koeficients pie $\frac{x^5}{5!}$.

Burti M,B,N,T un R dotajā vārdā ir vienu reizi un katrs no šiem burtiem var būt vai nebūt 5 vienības garajā vārdā, tātad katram no šiem burtiem veidotājfunkcijā atbildīs viens lineārs reizinātājs formā 1+x. Burti K,O,I un A dotajā vārdā ir divas reizes, katrs no šiem burtiem 5 vienības garajā vārdā var būt 0,1 vai 2 reizes, tāpec katram no šiem burtiem veidotājfunkcijā atbildīs reizinātājs $1+x+\frac{x^2}{2!}$.

PIEMĒRS Cik ir dažādu m vienības garu virkņu alfabētā {0,1,2,3}, kurās neviens simbols nav tieši 2 reizes? Atbilstošā eksponenciālā veidotājfunkcija ir

$$(1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^k}{k!}+...)^4=(e^x-\frac{x^2}{2!})^4$$

un atrisinājums ir koeficients pie $\frac{x^m}{m!}$.

TEORĒMA 2.9 Ir dota virkne $a(n),\ n\geq 1$, definēsim jaunu virkni c(n) ar šādu nosacījumu:

$$c(0)=1,\quad c(|X|)=\sum_p a(|Y_1|)\cdot ...\cdot a(|Y_k|), \tag{2.35}$$

kur kopa X ir galīga un netukša, un summēšana tiek veikta pa visiem kopas X nesakārtotiem sadalījumiem $p=(Y_1,...,Y_k)$, citiem vārdiem sakot, $\bigcup_{i=1}^{k} Y_i = X,\ Y_i \cap Y_k=\varnothing,\ Y_i\neq\varnothing$. Tad izpildās sakarība $C_{\exp}(x)=e^{A_{\exp}(x)}$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim a(0)=0. Katram k>0 definēsim virkni $b_k(n)$ ar nosacījumu $b_k(|X|)=\sum_{(Y_1,...,Y_k)} a(|Y_1|)...a(|Y_k|)$, kur summēšana tiek veikta pa visiem sakārtotiem sadalījumiem ar fiksētu apakškopu skaitu k

Ievērosim, ka $B_{k,\exp}(x) = A_{\exp}^k(x)$ saskaņā ar Teorēmu 2.8. Visi sakārtotie sadalījjumi ir dažādi, jo neviena no sadalījuma apakškopām nav tukša. Katram k>0 definēsim virkni $c_k(n)$ ar nosacījumu $c_k(|X|) = \sum_{p=\{Y_1,\dots,Y_k\}} a(|Y_1|)\dots a(|Y_k|)$, kur summēšana tiek veikta pa visiem nesakārtotiem sadalījumiem. Redzam, ka

$$C_{k,\exp}(x) = \frac{B_{k,\exp}(x)}{k!} = \frac{A_{\exp}^k(x)}{k!},$$

tāpēc $C_{\exp}(x) = 1 + \sum_{k\ge1} C_{k,\exp}(x) = \sum_{k\ge0} \frac{A_{\exp}^k(x)}{k!} = e^{A_{\exp}(x)}$. *QED*

TEORĒMA 2.10 (kompozicionālā formula) Ir dotas virknes $a(n), n \ge 1$ un $b(n), n \ge 0$, izpildās nosacījums b(0)=1. Definēsim jaunu virkni c(n) ar šādu nosacījumu:

$$c(|X|) = \sum_p a(Y_1)\cdot\ldots\cdot a(Y_k)\cdot b(k), \qquad (2.36)$$

kur kopa X ir galīga un summēšana tiek veikta pa visiem kopas X nesakārtotiem sadalījumiem netukšās apakškopās $(Y_1,\dots,Y_k)$. Tad izpildās sakarība $C_{\exp}(x) = B_{\exp}(A_{\exp}(x))$.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts tāpat kā Teorēmā 2.9. Rezultātā iegūsim

$$C_{\exp}(x) = \sum_{k\ge0} \frac{A_{\exp}^k(x)b(k)}{k!} = B_{\exp}(A_{\exp}(x)).$$

QED

PIEMĒRS *Bella skaitļi.* Nodaļā par rekurentajām sakarībām mēs ieguvām rekurentu sakarību, kuru apmierina Bella skaitļi: $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k}$ vai, nobīdot indeksu, $B_n=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} B_{n-k}$. Atradīsim eksponenciālo veidotājfunkciju, kas atbilst virknei $\{B_i\}_{i\geq 0}$ (apzīmējumu ērtības dēļ apzīmēsim to ar B(x)): $B(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{B_k x^k}{k!}$. Redzam, ka

$$(B(x))'=\sum_{k\geq 1}\frac{B_k kx^{k-1}}{k!}=\sum_{k\geq 1}\frac{B_k x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k\geq 1}(\sum_{i=1}^{k} C_{k-1}^{i-1} B_{k-i})\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=\sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\frac{B_{k-i}x^{k-i}}{(k-i)!}=\sum_{k-i\geq 0}\frac{B_{k-i}x^{k-i}}{(k-i)!}(\sum_{i-1\geq 0}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!})=(\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!})\cdot(\sum_{m\geq 0}\frac{B_m x^m}{m!})=e^x B(x)$$

Šajos pārveidojumos bija pareizi jāmaina summēšanas kārtība un jāizdara indeksu maiņa.

Tātad B(x) apmierina vienādojumu $B'=e^x B$ un, atrisinot šo pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, iegūstam, ka $B(x)=ce^{e^x}=c\exp(\exp(x))$ ar kaut kādu konstanti c, ko atrod no sākuma nosacījumiem. Eleganti uzdevumu par Bella skaitļiem var atrisināt, izmantojot Teorēmu 2.9. Ja definē $a(n)=1, \forall n$, tad $A_{\exp}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ un

$$B(n)=\sum_{p\in\Pi_n}1=\sum_{p=\{Y_1,\ldots,Y_k\}\in\Pi_n} a(|Y_1|)\ldots a(|Y_k|),$$

kur summēšana tiek veikta pa visu n elementus lielas kopas (nesakārtotu) sadalījumu kopu Π_n.

Saskaņā ar Teorēmu 2.9 iegūstam, ka $B_{\exp}(x)=\sum_{n\ge 0}\frac{B_n x^n}{n!}=\exp(\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n!})=\exp(\exp(x)-1)$. Izteiksim arī B_n bezgalīgas summas veidā:

$$B_{\exp}(x)=\exp(\exp(x)-1)=\frac{1}{e}\exp(\exp(x))=\frac{1}{e}\sum_{i\ge 0}\frac{e^{ix}}{i!}=\frac{1}{e}\sum_{i\ge 0}\frac{1}{i!}\sum_{n\ge 0}\frac{i^n x^n}{n!}=\sum_{n\ge 0}(\frac{1}{e}\sum_{i\ge 0}\frac{i^n}{i!})\frac{x^n}{n!}$$

.

Iegūstam, ka $B_n=\frac{1}{e}\sum_{i\ge 0}\frac{i^n}{i!}$.

PIEMĒRS *Otrā veida Stirlinga skaitļi* S(n,k) - tik dažādos veidos var n elementus lielu kopu sadalīt k netukšās apakškopās.

Atradīsim īsu pierakstu šo skaitļu virknes (ar fiksētu k) eksponenciālajai veidotājfunkcijai.

Pirmajā solī pierādīsim sakarību $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^n$.

Katra sirjektīva funkcija no n elementu kopas uz k elementu kopu definē definīcijas apgabala kopas sadalījumu k netukšās apakškopās. Tā kā mēs varam sanumurēt k elementu kopu k! dažādos veidos, tad saskaņā ar dalīšanas likumu S(n,k) ir jābūt vienādam ar visu sirjektīvo funkciju skaitu no n elementu kopas uz k elementu kopu dalītu ar k!. Iepriekš tika parādīts, ka skaitlis $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^n$ ir vienāds ar sirjektīvu funkciju skaitu no n elementu kopas uz k elementu kopu, tātad apsolītais apgalvojums ir pierādīts. Otrajā solī vienkāršosim pašu veidotājfunkciju:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^n\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{k-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{k-i}e^{ix}=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$$

PIEMĒRS Izmantojot eksponenciālās veidotājfunkcijas vēlreiz atrisināsim uzdevumu par sirjektīvo funkciju skaitu.

Cik ir sirjektīvu funkciju no n elementus lielas kopas X={1,...,n} uz m elementus lielu kopu Y={1,...,m}? Apzīmēsim šo skaitli ar R_n^m .

Katra sirjektīva funkcija $f: X \to Y$ ir viennozīmīgi uzdota ar virkni $(f(1), f(2),..., f(n))$, kurā katrs kopas Y elements ieiet vismaz vienu reizi. Katra kopas Y elementa ieguldījums eksponenciālajā veidotājfunkcijā ir reizinātājs $x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^k}{k!}+...=e^x-1$, tātad eksponenciālā veidotājfunkcija $R^m(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{R_n^m x^n}{n!}$ ir vienāda ar $(e^x-1)^m$ un atrisinājums ir šīs veidotājfunkcijas koeficients pie $\frac{x^n}{n!}$.

Ievērosim, ka šī veidotājfunkcija ir vienāda ar kopas m vienības garu netukšu apakškopu virkņu skaita eksponenciālajai veidotājfunkcijai.

Summējot $R^m(x)$ pa m mēs iegūsim eksponenciālo veidotājfunkciju R(x) , kuras koeficients R_n pie $\frac{x^n}{n!}$ ir vienāds ar visu iespējamo sirjektīvo funkciju skaitu no kopas {1,...,n}. Tādējādi

$$R(x)=\sum_{m\geq 0} R^m(x)=\sum_{m\geq 0}(e^x-1)^m=\frac{1}{1-(e^x-1)}=\frac{1}{2-e^x}$$

un

$$R(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^x}=\frac{1}{2}\sum_{i\geq 0}\frac{e^{ix}}{2^i}=\frac{1}{2}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{2^i}\sum_{n\geq 0}\frac{i^n x^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2}\sum_{i\geq 0}\frac{i^n}{2^i})\frac{x^n}{n!},$$

tāpēc $R_n=\frac{1}{2}\sum_{i\geq 0}\frac{i^n}{2^i}$.

Vēl viena lietderīga eksponenciālo veidotājfunkciju Ipašība ir saistīta ar to atvasināšanu. Ievērosim, ka

$$A'_{\exp}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n n x^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{a_{n+1}x^n}{n!}.$$

PIEMĒRS Atrisināsim Fibonači virknes uzdevumu ar eksponenciālajām veidotājfunkcijām.

Fibonači virknes definējošā rekurentā sakarība $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ eksponenciālo funkciju terminos ir ekvivalenta diferenciālvienādojumam

$$F''_{\exp}(x)=F'_{\exp}(x)+F_{\exp}(x),$$

kura vispārīgais atrisinājums ir $F_{\exp}(x) = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x}$, kur $l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Fiksējot sākuma nosacījumus atradīsim konstantes un eksponenciālās veidotājfunkcijas koeficientus.

ĢEOMETRISKI UZDEVUMI UN METODES

Ievērojamai daļai kombinatorikas uzdevumu un rezultātu ir ģeometriska izcelsme un daba. Dažus kombinatorikas uzdevumus var reducēt uz ceļu (trajektoriju) skaitīšanu. Šajos uzdevumos skaitāmie objekti sākotnēji tiek kodēti ģeometriskā veidā, piemēram kā lauztas līnijas, kas apmierina noteiktus nosacījumus. Uzdevuma risināšanas gaitā parasti rodas nepieciešamība reducēt sākotnējo uzdevumu uz kādu no pamatuzdevumiem.

PIEMĒRS Cik veidos var nokļūt no punkta $(0,0)$ līdz punktam (n,m), ja vienā solī ir atļauts pārvietoties par vektoru (1,0) vai vektoru (0,1)? Ceļu no (0,0) līdz (n,m) var domāt kā bināru virkni ar garumu n+m, kur 0 nozīmē, ka tiek iets pa labi un 1 nozīmē, ka tiek iets uz augšu. Tātad kopā ir C_{n+m}^{m} dažādu virkņu = ceļu.

PIEMĒRS Izmantojot trajektoriju metodi pierādīt identitāti $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^{n}$. Apskatīsim maršrutus no $(0,0)$ līdz (n, n). Katrs maršruts iet caur vienu un tikai vienu punktu $(k, n-k)$. Maršrutu skaits, kas iet caur šo punktu ir vienāds ar $C_{k+(n-k)}^{k} C_n^k = (C_n^k)^2$. Atceroties summas likumu un skaitot pa visām k vērtībām, iegūstam doto formulu.

PIEMĒRS (no [3]) "Pie kino kases stāv rinda, kurā ir m+n cilvēki, pie tam n cilvēkiem ir tikai 50 kapeiku monētas, bet pārējiem m cilvēkiem ir tikai pa 1 rublim. Sākumā kasē nav naudas, un kino biļete maksā 50 kap. Cik veidos rindā var izvietot m+n cilvēkus tā, lai nevienam pircējam nebūtu jāgaida uz naudas atlikuma izdošanu (m<n) ? " Piekārtosim katram cilvēkam skaitli a_i:

$$a_i = \begin{cases} 1, \; ja \; i-tajam \;\; cilvēkam \;\; ir \;\; 50 \; kap. \\ -1, \; ja \; i-tajam \;\; cilvēkam \;\; ir \;\; 1 \; rbl. \end{cases}$$

Apskatīsim lielumu $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, ko var interpretēt kā starpību starp 50 kap. monētu un 1 rbl. monētu skaitu, kurus kasierei pasniedz pirmie k pircēji.

Konstruēsim koordinātu plaknē punktus (k, S_k) un aplūkosim attiecīgo lauzto līniju. Visas lauztās līnijas sākas punktā (0,0) un beidzas punktā (n+m,m-n), tātad kopējais šādu līniju skaits ir C_{n+m}^{n}. Katrai lauztajai līnijai atbilst kāds "scenārijs". Vēlamie scenāriji (kad nevienam cilvēkam nav jāgaida atlikums) atbilst trajektorijām, kuras nekrusto taisni y=-1. Cik ir trajektoriju, kas krusto taisni y=-1 (izmantosim principu „skaitīšana izmantojot papildinājumu")? Katru šādu trajektoriju pārveidosim – pēc pirmā krustpunkta atstarosim attiecībā pret asi y=-1. Iegūsim jaunu trajektoriju, kuras galapunkts ir (n+m,m-n-

2). Ir savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp visām trajektorijām no (0,0) līdz (n+m,m-n-2) un "nevēlamajām" trajektorijām, tāpēc meklējamais "nevēlamo" trajektoriju skaits ir C_{m+n}^{n+1} (izmantosim principu „skaitīšana izmantojot bijekciju"). Atbilde ir $C_{n+m}^{n} - C_{m+n}^{n+1}$.

PIEMĒRS Ar a(n,m) apzīmēsim dažādo maršrutu skaitu no punkta ar koordinātēm (0,0) līdz punktam ar koordinātēm (n,m), ja atļautie soļi ir šādi: (1,0), (0,1), (1,1).

Apskatīsim veidotājfunkciju $A(x,y) = \sum_{m\geq 0, n\geq 0} a(n,m)x^n y^m$.

Pārveidosim divkāršo summu par vienkāršu summu ar indeksu k, kas ir vienāds ar soļu skaitu maršrutā. Katrā solī var izvēlēties vienu no trim atļautajiem soļiem, kuriem atbilst veidotājfunkcijas x, y un xy, tātad veidotājfunkcija maršrutiem, kas satur tieši k soļus, ir vienāda ar $(x+y+xy)^k$. Rezultātā iegūstam, ka

$$A(x,y) = \sum_{k\geq 0} (x+y+xy)^k = \frac{1}{1-(x+y+xy)} = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Vēl kāda kombinatorikas uzdevumu klase ir saistīta ar plaknes vai telpas apgabalu noklāšanu ar dotā tipa figūrām. Šo uzdevumu risināšanai ir lietderīgi izmantot "krāsošanas pierādījumus" un rekurentās sakarības.

PIEMĒRS Vai ir iespējams noklāt ar 2x1 domino kauliņiem 8x8 šaha galdiņu, no kura ir izgriezti divi pretēji stūra lauciņi? Katrs domino kauliņš aizņem vienu baltu un vienu melnu lauciņu neatkarīgi no tā, kā tas ir novietots. Pretēji stūra lauciņi ir vienā krāsā, tāpēc uz atlikušā šaha galdiņa vienas krāsas lauciņu ir par 2 vairāk nekā otras krāsas lauciņu. Šis novērojams rāda, ka prasītais noklājums nav iespējams.