VEIDOTĀJFUNKCIJU METODE

IEVADS

Ja ir jāatrod virknes $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ vispārīgā locekļa a_n atkarība no n, tad var būt lietderīgi mēģināt izveidot no šīs virknes locekļiem kādu citu objektu, kas saturētu visu informāciju par virkni, bet būtu vieglāk analizējams.

Plaši izplatīta kombinatorikas metode, kurā ir realizēta šī ideja, ir *veidotājfunkciju metode*.

Virknei tiek piekārtota funkciju rinda, kuru bieži var identificēt ar elementāru funkciju, izmantojot informāciju par virkni, piemēram rekurentās sakarības, tiek pētīta šī jaunizveidotā funkcija un secinājumi tiek attiecināti uz virknes locekļiem.

Veidotājfunkcija tiek definēta tā, lai zinot veidotājfunkciju varētu relatīvi viegli atrast atbilstošās virknes locekļus.

Veidotājfunkciju pētīšana parasti ir saistīta ar algebras un matemātiskās analīzes tehnikas pielietošanu un virknes locekļu atrašana tiek reducēta uz algebrisku vienādojumu vai diferenciālvienādojumu risināšanu. Algebriskās un analītiskās operācijas ar veidotājfunkcijām var interpretēt kombinatorikas terminos.

Ja ir dota skaitļu virkne $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$, tad formālu pakāpju rindu

$$A(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2.24)$$

sauc par virknei atbilstošo *veidotājfunkciju* un formālu pakāpju rindu

$$A_{\exp}(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \qquad (2.25)$$

sauc par virknes *eksponenciālo veidotājfunkciju* .

Divas veidotājfuncijas ir vienādas jeb *formāli vienādas*, ja attiecīgie koeficienti pie vienādām argumenta pakāpēm ir vienādi.

Identificēsim ar virknes veidotājfunkciju jebkuru izteiksmi, kas ir ar to formāli vienāda.

Ievērosim, ka divu dažādu pakāpju monomu formālas saskaitīšanas rezultātā nekāds netriviāls pārveidojums netiek veikts.

Ja ir dota veidotājfunkcija A(x), tad ar $[x^n]A(x)$ apzīmēsim tās Teilora koeficientu pie x^n.

Kombinatorikas uzdevumu risināšana izmantojot veidotājfunkcijas parasti notiek pēc šāda algoritma:

1) uzdevuma nosacījumi tiek pārveidoti nosacījumos, kurus apmierina veidotājfunkcijas;

2) tiek atrastas veidotājfunkcijas vai izdarīti iespējamie secinājumi par to dabu;

3) izmantojot Teilora rindu teoriju tiek atrasti veidotājfunkciju koeficienti.

Veidotājfunkciju teorija balstās uz ideju vispārināt skaitīšanu šādā veidā. Ja ir dota kopa A (iespējams, bezgalīga) un kopa R ar asociatīvu un komutatīvu bināru operāciju, tad fiksēsim funkciju $w : A \to R$ un skaitīsim katru mūs interesējošās kopas A elementu $a \in A$ ar savu svaru $w(a)$, tādējādi rezultātā mēs iegūsim formālu summu $\sum_{a \in A} w(a)$, ko sauksim par kopas A *veidotājfunkciju attiecībā uz svaru w* un apzīmēsim ar $G(A, w)$.

Ievērosim šo vispārināšanas soli: naivā skaitīšana $\sum_{a \in A} 1$ tiek vispārināta uz skaitīšanu ar svaru $\sum_{a \in A} w(a)$.

Veidotājfunkciju $A(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ tagad varam interpretēt kā skaitīšanas rezultātu, kurā katrs objekts ar parametru n tiek skaitīts ar svaru x^n.

Tādējādi veidotājfunkcija ir matemātiska konstrukcija, kas atbilstošajā nozīmē satur informāciju par doto kombinatorikas uzdevumu kopumā.

Veidotājfunkcijas pieraksts elementāras funkcijas veidā bieži vien ļauj pielietot divkāršās skaitīšanas principu.

Veidotājfunkcijas pirmais sāka izmantot 18.gs. matemātiķis de Muavrs.

Summēšana (tāpat kā virkne) var sākties ar jebkuru indeksu, visbiežāk ar 0 vai 1. Var redzēt, ka veidotājfunkcija $A(x)$ tiek definēta kā Teilora rinda punkta x=0 apkārtnē.

Ja ir iespējams, veidotājfunkciju ir jāmēģina pierakstīt elementāras funkcijas veidā.

Jāpiebilst, ka jautājumi par veidotājfunkciju konverģenci vai konverģences rādiusu klasiskajā nozīmē parasti kombinatorikā nespēlē izšķirošo lomu. Veidotājfunkcijas konverģences rādiuss tiek izmantots, lai novērtētu koeficientus, izmantojot Ābela teorēmu par pakāpju rindām. Šī kombinatorikas nozare mūsdienās ir diezgan aktīva.

Formālo pakāpju rindu teorijā tiek lietots cits konverģences jēdziens: teiksim, ka viena argumenta pakāpju rindu virkne $\{f_i\}_{i\geq 0}$ konverģē uz pakāpju rindu f, ja katram naturālam k eksistē naturāls N, tāds, ka visiem n>N pakāpju rindām f_n un f pirmie k locekļi ir vienādi (kā polinomi).

Atgādināsim, ka ja f(x) ir bezgalīgi daudzas reizes atvasināma funkcija un kādā punkta x=0 apkārtnē var tikt izvirzīta pakāpju rindā $f(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$, tad $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Elementāras funkcijas jebkura Teilora rindas koeficienta noteikšana ir iespējama galīgā laikā ar deterministiska algoritma palīdzību, tāpēc kodēšanu no veidotājfunkcijas pieraksta elementāras funkcijas veidā uz tās koeficientu virkni ir iespējams realizēt ar datorprogrammas palīdzību.

Virknes veidotājfunkciju var uzskatīt arī par tās kompaktu pierakstu elementāras funkcijas veidā.

Atzīmēsim arī to, ka polinomu var uzskatīt par veidotājfunkciju, kurai tikai galīgs skaits koeficientu ir atšķirīgi no 0.

Visu formālu viena vai vairāku argumentu pakāpju rindu kopu ar koeficientiem laukā k sauc par *pakāpju rindu gredzenu* un apzīmē ar $k[[x_1,...,x_n]]$, kur $x_1,...,x_n$ ir pakāpju rindas neatkarīgie argumenti. Zemāk tiks definētas veidotājfunkciju saskaitīšanas un reizināšanas operācijas, kas apmierina gredzena aksiomas. Lasītājs var pārliecināties, ka pakāpju gredzenos aditīvais neitrālais elements ir veidotājfunkcija 0 un multiplikatīvais neitrālais elements ir 1, pakāpju rinda ir invertējama tad un tikai tad, ja tās brīvais loceklis ir atšķirīgs no 0.

Veidotājfunkcijas var uzdot arī bezgalīga reizinājuma $\prod_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ veidā, kur katra no funkcijām $f_i(x)$ ir polinomiāla, racionāla vai elementāra funkcija. Bezgalīga reizinājuma veidotājfunkcijas pārveidošana standarta (summas) veidā notiek formāli atverot iekavas reizinājumā un atrodot koeficientu pie visām argumenta pakāpēm. Strādājot ar bezgalīgiem reizinājumiem ir lietderīgi izmantot vienādību

$$\prod_{i\in I}(1+x_i) = \sum_{J\subseteq I}\left(\prod_{j\in J} x_j\right), \qquad (2.26)$$

kuras pierādījums tiek atstāts lasītāja ziņā.

Veidotājfunkcijas ideju var vispārināt uz virknēm, kas ir atkarīgas no vairākiem indeksiem. Ja ir dota skaitļu virkne, kas ir atkarīga no k naturāliem indeksiem $\{a_{i_1\ldots i_k}\}_{i_l\in N}$, tad formālu pakāpju rindu

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i_1>0, i_2>0, \ldots, i_k>0} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k} \qquad (2.27)$$

sauc par virknei atbilstošo *daudzargumentu veidotājfunkciju*.

Visu daudzargumentu veidotājfunkciju kopu ar argumentiem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ un koeficientiem laukā k apzīmēsim ar $k[[x_1, x_2, ..., x_k]]$ un sauksim par *daudzargumentu pakāpju rindu gredzenu*.

Divas daudzargumentu veidotājfuncijas ir vienādas, ja attiecīgie koeficienti pie vienādiem monomiem ir vienādi. Daudzargumentu veidotājfunkcijas tiek pielietotas, ja skaitāmie objekti ir atkarīgi no vairākiem diskrētiem parametriem.

PIEMĒRS Virknes 1,1,1,1,..., ($a_n = 1$) veidotājfunkcija ir $A(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$. Virknes $a, a^2, a^3, ...,$ $a_n = a^n$ (ģeometriskās progresijas) veidotājfunkcija ir

$$B(x) = a + a^2 x + a^3 x^2 + ... = a(1 + ax + (ax)^2 + ...) = \frac{a}{1-ax}.$$

PIEMĒRS Galīgas virknes $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ kā augšējā indeksa funkcijas veidotājfunkcija ir

$$C_n(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n = (1+x)^n. \tag{2.28}$$

Šo faktu var pierādīt arī izmantojot formulu (2.26), kurā definēsim $x = x_1 = ... = x_{|I|}$ un ievērosim, ka labajā pusē koeficients pie x^i ir vienāds ar i elementus lielu apakškopu skaitu kopā, kas satur |I| elementus.

PIEMĒRS Atradīsim veidotājfunkciju apakšmultikopu virknei, ja ir dota multikopa ar neierobežotu skaitu n dažādu tipu elementiem.

Pieņemsim, ka ir dota multikopa ar elementiem {1,2,...,n}, apzīmēsim ar $l_M(i)$ apakšmultikopas M to elementu skaitu, kas ir vienādi ar i, piemēram, ja M={1,1,2,3,3,3}, tad $l_M(1)=2$, $l_M(3)=3$ un $l_M(4)=0$. Definēsim $Z_n(x_1,...,x_n)=\sum_M \prod_{i=1}^n x_i^{l_M(i)}$, kur summēšana tiek veikta pa visām iespējamām apakšmultikopām M n-multikopā. Var redzēt, ka koeficients pie monoma $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ ir vienāds ar 1 un

$$Z_n(x)=(1+x_1+x_1^2+...)(1+x_2+x_2^2+...)\cdot...\cdot(1+x_n+x_n^2+...)=\prod_{i=1}^n \frac{1}{(1-x_i)}.$$

Liekot $x=x_1=...=x_n$ un ievērojot, ka koeficients pie monoma x^i veidotājfunkcijā $Z_n(x,...,x)$ ir vienāds ar dažādu apakšmultikopu skaitu, kas satur i elementus, eleganti iegūsim veidotājfunkciju virknei $\overline{C}_n^m$:

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{i\ge 0}\overline{C}_n^i x^i. \qquad (2.29)$$

No jau uzdotām veidotājfunkcijām var konstruēt jaunas veidotājfunkcijas pielietojot algebriska vai analītiska rakstura operācijas ar veidotājfunkcijām. Vienkāršākās operācijas ir šādas:

1) *divu veidotājfunkciju saskaitīšana* :

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)+(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$

2) *veidotājfunkcijas reizināšana ar skaitli:*

$$c\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n ,$$

3) *divu veidotājfunkciju reizināšana:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

kur $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, speciālgadījums – reizināšana ar x^k,

4) *veidotājfunkcijas koeficientu nobīde:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n \text{ vai } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n ,$$

5) *veidotājfunkcijas atvasināšana:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} ,$$

6) *divu veidotājfunkciju kompozīcija (substitūcija):*

$$(A(x),\ B(x)) \to A(B(x)) ,$$

ja B(0)=0 jeb $b_0 = 0$, šādā gadījumā izteiksmei $A(B(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n B^n(x)$ ir formāla jēga, jo katra izteiksmes A(B(x)) koeficienta aprēķināšanai ir nepieciešams galīgs skaits soļu, šis apstāklis var neizpildīties, ja $B(0) \neq 0$, jeb $b_0 \neq 0$.

PIEMĒRS Ja $A(x)=\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, tad $e^{A(x)}=\exp(A(x))=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{A^n(x)}{n!}$ un $\ln(1-A(x))=-\sum\limits_{n\geq 1}\frac{A(x)}{n}$.

Atzīmēsim vēl dažus lietderīgus trikus, kurus izmanto darbā ar veidotājfunkcijām:

1) $A(x)\to x^n A(x)$ - koeficientu nobīde par n vienībām, iegūstam virkni $(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, a_0, a_1,\ldots)$,

2) $A(x)\to A(x)-a_n x^n$ - n-tā koeficienta anulēšana, iegūstam virkni $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},0,a_{n+1},\ldots)$,

3) $A(x)\to A(x^2)$ - koeficientu „izretināšana”, iegūstam virkni $(a_0,0,a_1,0,a_2,0,\ldots.)$,

4) $A(x)\to\frac{A(x)-a_0}{x}$ - koeficientu nobīde negatīvajā virzienā par vienu vienību, iegūstam virkni $(a_1,a_2,\ldots)$,

5) $A(x)\to A'(x)$ - koeficientu reizināšana ar naturāliem skaitļiem, iegūstam virkni $(a_1,\ 2a_2,\ 3a_3,\ldots)$,

6) $A(x)\to\int\limits_0^x A(t)dt$ - koeficientu dalīšana ar naturāliem skaitļiem, iegūstam virkni $(0,\ a_0,\ \frac{a_1}{2},\ \frac{a_2}{3},\ldots)$,

7) $A(x) \to \frac{A(x)}{1-x}$ - koeficientu saskaitīšana, iegūstam virkni $(a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,.....)$.

PIEMĒRS Cik dažādos veidos 8 identiskas konfektes var izdalīt 3 daļās tā, ka katrā daļā ir vismaz 2, bet ne vairāk kā 4 konfektes?

Apzīmēsim ar a_n to veidu skaitu, kādos n konfektes var sadalīt 3 daļās. Var redzēt, ka a_n ir vienāds ar koeficientu pie x^n polinomā $(x^2+x^3+x^4)^3$ tāpēc, ka a_n ir vienāds ar vienādojuma $a_1+a_2+a_3=n$ pozitīvu atrisinājumu skaitu, kas apmierina nosacījumu $2 \le a_i \le 4$.

PIEMĒRS *(sadalījumu skaita virknes veidotājfunkcija un tās īpašības)*
Par naturāla skaitļa n sadalījumu sauc naturālu skaitļu kopu, kuras elementu summa ir vienāda ar n. Ja n=5, tad ir 7 dažādi sadalījumi:

$$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1.$$

Ar p(n) mēs apzīmējam naturāla skaitļa n sadalījumu skaitu. Definēsim arī p(0)=0 kā izņēmumu. Pierādīsim, ka atbilstošā veidotājfunkcija $P(x)=\sum_{i\ge 0} p(i)x^i$ apmierina sakarību $P(x)=\prod_{j\ge 1}\frac{1}{1-x^j}$ Tiešām, redzam, ka

$$\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-x^j}=(1+x+x^2+...)(1+x^2+x^4+...)...$$

Formāli atverot iekavas šajā bezgalīgajā reizinājumā, redzam, ka locekli ar x^i var iegūt izvēloties, piemēram, reizinātāju x^{n_1} no pirmajām iekavām, reizinātāju x^{2n_2} no otrajām iekavām, un tā tālāk. Kāpinātāji apmierina sakarību $n_1+2n_2+...=i$. Katra šādas kāpinātāju sistēmas izvēle koeficientam pie x^i dod ieguldījumu vienādu ar 1, tātad šis koeficients ir vienāds ar $p(i)$.

PIEMĒRS Apskatīsim daudzargumentu veidotājfunkciju, kas atbilst polinomam $(x_1+x_2+...+x_k)^n$. Koeficients pie monoma $x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}$ ir vienāds ar k apakšvirkņu skaitu, kuru elementi pieder n elementus lielai kopai ($C_n^{i_1,i_2,...,i_k}$).

KOMBINATORISKĀS KLASES, OPERĀCIJAS AR TĀM UN VEIDOTĀJFUNKCIJAS

Šajā nodaļā mēs apskatīsim vispārīgus saliktus kombinatorikas uzdevumus un to atrisināšanu izmantojot veidotājfunkcijas. Sekojot F.Flažolē darbiem, aprakstīsim kādu relatīvi jaunu pieeju kombinatorikas uzdevumu risināšanai, kurā akcents tiek likts uz kombinatorikas uzdevumu strukturālo analīzi.

Par *kombinatorisko klasi* sauksim galīgu vai sanumurējamu kopu A , kuras elementiem ir definēta *izmēra* vai *lieluma* funkcija $l : A \to N \cup \{0\}$.

Elementa $a \in A$ lielumu apzīmēsim arī ar |a|. Ar A_n mēs apzīmēsim kopas A apakškopu $l^{-1}(n) \subseteq A$, citiem vārdiem sakot, to elementu kopu, kuru lielums ir vienāds ar n.

Parasti katras kopas A_n elementiem var uzrādīt to nedalāmas sastāvdaļas, ko sauksim par atomiem, bieži vien atomu kopu identificē ar A_1.

Uzskatīsim, ka katra kopa $| A_n |$ ir galīga.

Par kombinatoriskās klases skaitošo virkni sauksim virkni $a_n = | A_n |$.

Divas kombinatoriskas klases sauksim par izomorfām, ja to skaitošās virknes ir vienādas.

Par kombinatoriskās klases A veidotājfunkciju sauksim tās skaitošās virknes veidotājfunkciju A(x).

Pieņemsim, ka ir dotas kombinatoriskas klases B,C,... un kāda kombinatoriska klase A, kas ir atkarīga no B,C,... - $A = \Phi(B, C, ...)$, pieņemsim, ka katra kopa A_n ir atkarīga no galīga skaita kopām $B_i, C_j, \cdots$. Teiksim, ka Φ ir *pieļaujama konstrukcija*, ja klases A skaitošā virkne ir atkarīga tikai no klašu B,C,... skaitošajām virknēm, citiem vārdiem sakot

$$A(x) = \Psi(B(x), C(x), ...).$$

Pieļaujamās konstrukcijas uzdod ar *specifikāciju* palīdzību. Ar E apzīmēsim *neitrālo (vienības)* klasi, kuras veidotājfunkcija ir 1 (tajā ir tikai 1 elements ar izmēru 0) - $E = E_0, |E| = 1$. Par *atomāru* klasi Z sauksim klasi, kuras veidotājfunkcija ir x - $Z = Z_1, |Z| = 1$.

Pārskaitīsim dažas plašāk izplatītas vienkāršas pieļaujamas konstrukcijas:

1) *apvienojums* - ja $B \cap C = \varnothing$, tad $A = B + C = B \cup C$;

2) *tiešais reizinājums* – $A = B \times C = \{(b, g) \mid b \in B, g \in C\}$, kur arī definēsim $|(b, g)| = |b| + |g|$;

3) *virknes* - $A = S(B) = E + B + B \times B + ... + B^n + ...$, ierobežotas virknes – $A = S_k(B) = E + B + B \times B + ... + B^k$;

4) *multikopas* - $A = M(B) = S(B)/R$, kur R ir ekvivalences attiecība, kas saista divas virknes tad un tikai tad, ja tās atšķiras ar elementu kārtību, ierobežotas kopas - $A = M_k(B) = S_k(B)/I$;

5) *kopas* – $A = P(B) \subseteq M(B)$, ierobežotas kopas $A = P_k(B)$;

6) *cikli* - $A = Z(B) = S(B)/R_Z$, kur R_Z ir ekvivalences attiecība, kas saista divas virknes tad un tikai tad, ja tās atšķiras ar elementu ciklisku pārbīdi, ierobežoti cikli - $A = Z_k(B) = S_k(B)/R_Z$;

7) *iezīmēšana*- $A = \Theta(B) = \sum_{k\geq 0} B_k \times \{e_1,...,e_k\}$, kur $\{e_1,...,e_k\}$ ir dažādi objekti ar izmēru 0, kopu $B_k \times e_i$ ir jāinterpretē kā kopa B_k, kurā viens elements ir iezīmēts;

8) *substitūcija* jeb *kompozīcija* – ja ir dotas klases B un C, tad $A = B(C) = \sum_{k\geq 0} B_k \times S_k(C)$.

PIEMĒRS Ja B={0,1}, tad S{B} ir visu bināro virkņu, kopa. Ja B={a}, tad $N = S_{\geq 1}\{B\} = \sum_{k\geq 1} S_k\{B\}$ ir naturālo skaitļu kopa, $P = M(N)$ ir naturālo skaitļu sadalījumu kopa.

Kombinatoriskas klases specifikāciju un pašu klasi sauksim par *iteratīvu*, jo to var uzdot ar neitrālajām un atomārajām klasēm pielietojot (iespējams, vairākkārtīgi) apvienojuma, tiešā reizinājuma, virknes, multikopas, kopas un cikla operācijas. Kombinatoriskas klases spacifikāciju sauksim par *rekursīvu*, ja definējamā klase A ir uzdota formā $A = \Phi(A)$.

Vispārīgā gadījumā kombinatorisko klašu kopas $\{A_1, ..., A_n\}$ specifikācija ir sistēma

$$\begin{cases} A_1 = \Phi_1(A_1, ..., A_n) \\ A_2 = \Phi_2(A_1, ..., A_n) \\ \qquad ... \\ A_n = \Phi_n(A_1, ..., A_n) \end{cases},$$

kur katra specifikācija Φ_i satur tikai neitrālās un atomārās klases, definējamās klases un vienkāršākās operācijas.

TEORĒMA

1) Ja $A = B + C$, tad A(x)=B(x)+C(x);

2) ja $A = B \times C$, tad A(x)=B(x)C(x);ja A=S{B}, tad $A(x) = \dfrac{1}{1 - B(x)}$;

3) ja A=M{B}, tad $A(x) = \exp(\sum_{k\ge1} \frac{1}{k} B(x^k)) = \prod_{i\ge1} \frac{1}{(1 - x^i)^{|B_i|}}$;

4) ja A=P{B}, tad $A(x) = \exp(\sum_{k\ge1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} B(x^k)) = \prod_{i\ge1} (1 + x^i)^{|B_i|}$;

5) ja A=Z{B}, tad $A(x) = \sum_{k\ge1} \frac{j\,(k)}{k} \ln(\frac{1}{1 - B(x^k)})$;

6) ja $A = \Theta\{B\}$, tad $A(x) = xB'(x)$;

7) ja A=B{C}, tad $A(x) = B(C(x))$.

Virkņu, kopu un ciklu konstrukcijās tiek pieņemts, ka $|B_0| = 0$.

PIERĀDĪJUMS 1) Tā kā $A_n = B_n \cup C_n$, tad $A(x) = B(x) + C(x)$.

2) Tā kā $A_n = \bigcup_{i=0}^{n} B_i \times C_{n-i}$, tad $|A_n| = \sum_{i=0}^{n} |B_i| \cdot |C_{n-i}|$ un $A(x) = B(x) \cdot C(x)$.

3) Tā kā $A = E + B + B \times B + B \times B \times B + \ldots$,tad

$$A(x) = 1 + B(x) + B^2(x) + B^3(x) + \ldots = \frac{1}{1 - B(x)}.$$

4) Var redzēt, ka $A = M(B) \cong \prod_{b \in B} S\{b\}$, jo multikopas elementus var šķirot pēc to izmēra un noteiktas kārtības katrā kopā B_n. Tādējādi

$$A(x) = \prod_{b \in B} \frac{1}{1 - x^{|b|}} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-x)^{|B_n|}} = \exp(\ln(\prod_{n \geq 1} (1-x)^{-|B_n|})) = \exp(\sum_{n \geq 1} |B_n| \ln(1-x)^{-1})$$

.

5) Var redzēt, ka $A = S\{B\} \cong \prod_{b \in B} (E + \{b\})$,

PIEMĒRS Ja $B = B_1$ un $|B| = m$, tad definēsim A=S(B). Redzam, ka $A(x) = \frac{1}{1 - B(x)} = \frac{1}{1 - mx} = \sum_{n \geq 0} m^n x^n$. Esam vēlreiz ieguvuši rezultātu $\overline{A}_m^n = m^n$.

PIEMĒRS Var redzēt, ka ja $A = S_k(B)$, tad $A(x) = B^k(x)$.

Izteiksim veidotājfunkcijas klasēm $P_2(B)$ un $M_2(B)$, ja veidotājfunkcija klasei B ir zināma.

Klases $P_2(B)$ elementi ir nesakārtoti klases B dažādu elementu pāri, katru šādu pāri $\{a,b\}$ var identificēt ar divu sakārtotu pāru (a,b) un (b,a) kopu. Definēsim $D(B)=\Delta(B\times B)=\{(a,a)\,|\,a\in B\}$. Tā kā $D_{2n}=B_n$ un $D_{2n+1}=0$, tad $D(x)=B(x^2)$. Iegūstam, ka

$$P_2(B)+P_2(B)+\Delta(B\times B)\equiv B\times B,$$

tātad $2A(x)+B(x^2)=B^2(x)$ un

$$A(x)=\frac{B^2(x)-B(x^2)}{2}.$$

Klases $M_2(B)$ elementi ir nesakārtoti klases B ne obligāti dažādu elementu pāri, tāpēc

$$A=M_2(B)\cong P_2(B)+\Delta(B\times B)$$

un $A(x)=\dfrac{B^2(x)-B(x^2)}{2}+B(x^2)$. Iegūstam, ka

$$A(x)=\frac{B^2(x)+B(x^2)}{2}.$$