REKURENTO SAKARĪBU METODE

IEVADS

Risinot kombinatorikas uzdevumus nereti rodas situācija, kad ir grūti uzreiz saskatīt atbildi vai pat hipotēzi. Tāda situācija gadās arī tad, ja ir jāatrod virknes $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ vispārīgā locekļa a_n atkarība no n.

Lietderīga šādu uzdevumu risināšanas stratēģija ir šāda:

izteikt virknes vispārīgo locekli a_n kā funkciju no ***iepriekšējiem*** *šīs virknes locekļiem un mēģināt izdarīt pietiekoši daudz secinājumu, lai atrastu atbildi - a_n atkarību no n.*

Šī ideja ir kombinatorikas pamatprincipa „skaldi un valdi" pielietošanas piemērs.

Realizējot šādu stratēģiju, ir nepieciešams arī atrast dažu (parasti dažu pirmo) virknes locekļu vērtības – „sākuma nosacījumus".

Tātad, ja ir jāatrod virknes $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ vispārīgā locekļa izteiksme, tad var būt lietderīgi, izmantojot uzdevuma nosacījumus, meklēt sakarības

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1) \qquad (1)$$

un pēc tam atrast formulu a_n aprēķināšanai, neizmantojot iepriekšējās a_i vērtības.

Sakarību (1) sauksim par *rekurentu sakarību*.

Rekurentās sakarības izmanto arī, lai pārbaudītu hipotēzes – ja ir zināma rekurenta sakarība f virknei $\{a_n\}_{n\geq n_0}$, ja ir zināmi pietiekoši daudzi sākuma nosacījumi un, ja hipotēzes virkne $\{b_n\}_{n\geq n_0}$ apmierina f un sākuma nosacījumus, tad meklējamā virkne $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ sakrīt ar virkni $\{b_n\}_{n\geq n_0}$.

Visbiežāk tiek apskatītas fiksētas kārtas rekurentās sakarības formā

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}), \qquad (2.17)$$

rekurentās sakarības veidā

$$a_n = f(a_{n/2}, a_{n/3}, ...) \qquad (2.18)$$

Viens no pirmajiem dokumentētajiem rekurento sakarību izmantošanas piemēriem ir atrodams 13.gs matemātiķa L.Fibonači darbos.

Rekurentās sakarības tiek meklētas, sadalot skaitāmās kopas objektus ar indeksu n mazākās daļās vai pētot kā objekti ar indeksu n ir atkarīgi no objektiem ar indeksu n-1, n-2, ...

Rekurentu sakarību sauksim par *k-tās kārtas rekurentu sakarību*, ja a_n var izteikt, izmantojot $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}$.

Par rekurentas sakarības atrisinājumu sauksim jebkuru virkni, kas apmierina šo sakarību. Rekurentas sakarības atrisinājums ir noteikts viennozīmīgi, ja ir dots pietiekoši daudz virknes sākuma elementu.

Rekurentu sakarību sauc par *homogēnu*, ja nulles virkne $a_0 = a_1 = a_2 = ... = 0$ ir tās atrisinājums, pretējā gadījumā rekurentu sakarību sauc par *nehomogēnu*.

Rekurentu sakarību sauc par *lineāru*, ja tai ir galīga kārta un funkcija f ir lineāra.

PIEMĒRS Virkņu piemēri, kas apmierina vienkāršas rekurentas sakarības ir aritmētiskā un ģeometriskā progresija, kuru rekurentās sakarības ir $a_n = a_{n-1} + d$ un $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

PIEMĒRS Ir dots algoritms (datorprogramma), kurš uzdevumu ar sākuma parametru n reducē uz divu tādu pašu uzdevumu risināšanu ar sākuma parametru n-1.

Kādu rekurentu sakarību var atrast algoritma darbības laika funkcijai T_n?

Tā kā katru uzdevumu ar sākuma parametru n-1 algoritms atrisina laikā T_{n-1}, tad atbilde ir

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-1} = 2T_{n-1}.$$

PIEMĒRS Apskatīsim visu n elementu kopas permutāciju skaita P_n atrašanas uzdevumu. Parādīsim, ka P_n apmierina rekurentu sakarību $P_n = P_{n-1}n$.

Pieņemsim, ka ir zināms P_{n-1} , kas atbilst n-1 elementu kopai $\{e_1,...,e_{n-1}\}$. Skaitīsim, cik veidos var sakārtot kopu $\{e_1,...,e_{n-1},e_n\}$, kas satur vienu „jaunu" elementu e_n.

Ja elementi $e_1,...,e_{n-1}$ jau ir sakārtoti, tad elementu e_n jau esošajā sakārtojumā var ievietot n veidos. Izmantojot reizināšanas likumu, iegūstam, ka

$$P_n = P_{n-1}n,$$

jo n elementus lielas kopas permutāciju var domāt kā sakārtotu pāri (f_{n-1},x), kur pirmais objekts ir $n-1$ elementus lielas kopas permutācija un x ir pēdējā elementa "koordināte" attiecībā uz f_n.

Tā kā $P_1 = 1$, tad iegūstam, ka $P_2 = 2\cdot 1$, $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1$, $P_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$,..., $P_n = n!$.

PIEMĒRS Apskatīsim visu n elementu kopas $X_n = \{e_1, ..., e_n\}$ apakškopu skaita $|P(X_n)|$ atrašanas uzdevumu.

Atcerēsimies, ka eksistē bijektīva atbilstība starp kopas apakškopām un binārām virknēm.

Pieņemsim, ka ir zināms $|P(X_{n-1})|$, kas atbilst n-1 elementu kopai $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$.

Skaitīsim, cik veidos var konstruēt apakškopu no kopas $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n\}$, kas satur vienu „jaunu" elementu e_n.

Ja kopas $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ elementi šai apakškopai jau ir izvēlēti (ir konstruēta bināra virkne ar garumu n-1, tad elementu e_n jau esošajai apakškopai var vai nu pievienot vai nepievienot (binārajā virknē ierakstīt 0 vai 1).

Izmantojot reizināšanas likumu, iegūstam, ka $|P(X_n)| = |P(X_{n-1})| \cdot 2$, jo n elementus lielas kopas apakškopu var domāt kā sakārtotu pāri (s_{n-1}, x), kur pirmais objekts ir šīs apakškopas sašaurinājums uz n-1 elementus lielo kopu X_{n-1} un x ir 0 vai 1.

Tā kā $|P(X_1)| = 2$, tad iegūstam, ka

$$|P(X_2)| = 2 \cdot 2, |P(X_3)| = 2 \cdot 2 \cdot 2, ..., |P(X_n)| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n.$$

PIEMĒRS Apskatīsim uzdevumu par kopas sadalījumu skaitu. Par galīgas kopas X sadalījumu sauc tādu netukšu kopas apakškopu sistēmu $\{X_i\}_{i\in I}$, kuras elementu apvienojums ir vienāds ar X: $X=\bigcup_{i\in I} X_i$, kur $X_i \cap X_j = \varnothing$, ja $i \neq j$.

n elementu kopas sadalījumu skaitu apzīmē ar B_n un sauc par *n-to Bella skaitli*.

Viegli redzēt, ka $B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15$. Definēsim B_0 vienādu ar 1.

Izteiksim B_{n+1} rekurentā veidā.

Pieņemsim, ka $X = \{1,2,...,n+1\}$ un apskatīsim apakškopu, kas satur elementu n+1, pieņemsim, ka tā satur vēl k elementus, kur $0 \le k \le n$, šos k elementus var izvēlēties C_n^k veidos un atlikušos n-k elementus var sadalīt apakškopās B_{n-k} veidos.

Tātad kopējais sadalījumu skaits, ja tā apakškopa, kas satur n+1, satur vēl k elementus, ir $C_n^k B_{n-k}$, saskaitot kopā visas iespējas, kas atbilst dažādām k vērtībām, iegūstam

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k}.$$

Šajā gadījumā kompakta formula (elementāras funkcijas veidā) skaitļiem B_n neizmantojot summu nav zināma.

LINEĀRĀS REKURENTĀS SAKARĪBAS.

Relatīvi viegli analizējams un risināms ir rekurento sakarību speciālgadījums, kad rekurentās sakarības labā puse ir lineāra funkcija ar fiksētu argumentu skaitu.

Ja katram n-k ir spēkā sakarība

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k}, \qquad (2.19)$$

tad saka, ka virkne $\{a_n\}_{n\geq 0}$ apmierina *homogēnu lineāru rekurentu sakarību* ar kārtu k.

Lineāru homogēnu rekurento sakarību risināšanas pamatideja:

1) atrisinājumi veido lineāru telpu virs reālo skaitļu lauka (operāciju definīcijas – ja dotas virknes $X = \{x_n\}_{n\geq 0}$ un $Y = \{y_n\}_{n\geq 0}$, tad $X + Y = \{x_n + y_n\}_{n\geq 0}$, $lX = \{lx_n\}_{n\geq 0}$),
2) šīs telpas dimensija ir k (sakarības kārta), tāpēc, ka virkni viennozīmīgi nosaka jebkuru k locekļi,
3) ir jāatrod šīs telpas bāzi (partikulārie atrisinājumi)
4) un tad var atrast telpas elementu, kas apmierina dotos sākuma nosacījumus kā bāzes elementu lineāru kombināciju.

Partikulārie atrisinājumi var tikt ņemti formā $n^i l^n$.

TEORĒMA 2.4 Ja virknes $\{x_n\}_{n\geq 0}$ un $\{y_n\}_{n\geq 0}$ apmierina homogēnu lineāru rekurentu sakarību, tad virkne $\{a\ x_n + b\ y_n\}_{n\geq 0}$ arī apmierina to pašu sakarību.

PIERĀDĪJUMS Izmantojot summas īpašības, redzam, ka

$$a\ x_n + b\ y_n = \sum_{i=1}^{k} a\ u_i\ x_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} b\ u_i\ y_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} u_i (a\ x_{n-i} + b\ y_{n-i}).$$

QED

Var piebilst, ka homogēnu lineāru rekurentu sakarību risināšanas metode ir analoģiska lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu risināšanai.

Piebildīsim arī, ka virkņu lineāra neatkarība ir jāsaprot kā tām atbilstošo funkciju lineārā neatkarība: virkņu kopa $\{a^1, a^2, ..., a^k\}$ ir lineāri neatkarīga, ja nosacījums

$$\sum_{i=1}^{k} g_i a_n^i = 0 \qquad (2.20)$$

ir spēkā visiem indeksiem n tad un tikai tad, ja $g_1 = g_2 = ... = g_k = 0$.

Lineārajām rekurentajām sakarībām meklēsim partikulāros atrisinājumus formā $x_n = l^n$, attiecībā uz l iegūsim vienādojumu

$$l^n = u_1 l^{n-1} + u_2 l^{n-2} + ... + u_k l^{n-k},$$

vai

$$l^k = u_1 l^{k-1} + u_2 l^{k-2} + ... + u_k \qquad (2.21)$$

*(*homogēnas lineāras rekurentas sakarības *raksturīgais vienādojums)*, kuru atrisinot iegūsim visas iespējamās l vērtības, ar kurām virkne $x_n = l^n$ var būt atrisinājums.

Pēc tam, kad raksturīgā vienādojuma saknes $l_1, l_2, ..., l_l$ ir atrastas, meklēsim atrisinājumu formā

$$a_n = c_1 l_1^n + c_2 l_2^n + ... + c_l l_l^n \qquad (2.22)$$

vai kaut kā līdzīgi un atradīsim koeficientu c_i vērtības tā, lai apmierinātu rindas dažu pirmo locekļu vērtības.

Apskatīsim gadījumu, kad $k = 2$.

Raksturīgais vienādojums ir $l^2 = u_1 l + u_2$, kura saknēm ir iespējami divi gadījumi:

1) eksistē divas dažādas saknes l_1, l_2, partikulārie atrisinājumi l_1^n, l_2^n ir lineāri neatkarīgi, meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1 l_1^n + c_2 l_2^n,$$

ja saknes ir kompleksas, tad var pārveidot vispārīgo atrisinājumu izmantojot Eilera formulas;

2) viena divkārša sakne l, eksistē 2 lineāri neatkarīgi partikulāri atrisinājumi $l^n, n\,l^n$, meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1 l^n + c_2 n\, l^n = l^n (c_1 + c_2 n).$$

FAKTS Ja homogēnas lineāras rekurentas sakarības kārta ir lielāka nekā 2, tad katrai raksturīgā vienādojuma saknei l ar kārtu m atbilst m lineāri neatkarīgi partikulārie atrisinājumi $l^n, n\,l^n, ..., n^{m-1} l^n$.
PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi.

Lineāru rekurentu sakarību sauc par *nehomogēnu*, ja to var izteikt formā

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k} + f_n, \qquad (2.23)$$

kur $\{f_n\}$ ir dota virkne.

Analoģiski rezultātiem nehomogēno lineāro diferenciālvienādojumu teorijai arī nehomogēnajām rekurentajām sakarībām vispārīgais atrisinājums ir vienāds ar atbilstošās homogēnās sakarības vispārīgā atrisinājuma un nehomogēnās sakarības partikulārā atrisinājuma summu.

PIEMĒRS *Fibonači virkne* tiek definēta ar šādiem nosacījumiem:

$$a_0 = 1,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = 2, ..., a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Raksturīgais vienādojums ir $l^2 = l + 1$, tā saknes ir $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Meklēsim vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n .$$

Ja n=0, tad iegūstam sakarību

$$1 = c_1 + c_2 ,$$

un, ja n=1, tad sakarību

$$1 = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) .$$

Atrisinot lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$$

iegūstam, ka $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ un $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

PIEMĒRS Šajā piemērā apskatīsim homogēnu lineāru rekurentu sakarību sistēmu. Risināsim šādu uzdevumu - cik ir dažādu n elementus garu vārdu alfabētā {0,1,2} tādu, ka jebkuri divi kaimiņu simboli atšķiras par 0 vai 1?

Apzīmēsim ar A_n to vārdu kopu, kas beidzas ar 1, un ar B_n - vārdu kopu, kas beidzas ar 0 vai 2. Apzīmēsim $|A_n|$ ar a_n un $|B_n|$ ar b_n. Mums ir jāatrod $c_n = a_n + b_n$ ar pareiziem sākuma nosacījumiem.

Domāsim par to, kā no vārdiem ar garumu n-1 var iegūt vārdus ar garumu n pievienojot vienu simbolu beigās.

Teiksim, ka vārds w rada vārdu w', ja vārdu w' var iegūt no vārda w pievienojot tam beigās vienu simbolu.

Ir spēkā sakarības

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

(katrs vārds no A_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n) un

$$b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$$

(katrs vārds no A_{n-1} rada divus jaunus vārdus no B_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no B_n).

Iegūstam, ka $b_n = 2a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_n$ un $a_{n+1} = a_n + b_n$, tātad $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} + a_n$ un $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

Lai atrisinātu uzdevumu līdz galam, ir jāatrod virkne a_n, kas apmierina sākuma nosacījumus $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, jāatrod b_n pēc formulas $b_n = a_{n+1} - a_n$ un jāatrod $c_n = a_n + b_n$.