DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Operācijas ar grafiem

Grafu teorijā bieži rodas nepieciešamība veidot jaunus grafus no jau uzdotiem. Apskatīsim dažas operācijas ar grafiem.

Papildināšana. Šī operācija jau tika definēta.

Apvienošana. Ja doti 2 grafi $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$, tad par to apvienojumu sauksim grafu

$$\Gamma \cup \Gamma' = (V \cup V', E \cup E').$$

Piemēram, var redzēt, ka katrs grafs ir tā komponenšu apvienojums.

Virsotnes (virsotņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta virsotne (virsotņu kopa) un visas tai incidentās šķautnes, virsotņu kopas U izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - U$, tādējādi

$$\Gamma - U = (V \backslash U, E \backslash \{(u, v) \cup (v, u) | u \in U, v \in V\}).$$

Šķautnes (šķautņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta šķautne vai šķautņu kopa, šķautņu kopas S izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - S$, tādējādi

$$\Gamma - S = (V, E \backslash S).$$

Šķautnes savilkšana. Virsotnes, kas incidentas ar doto šķautni, tiek apvienotas vienā virsotnē, šķautnes e savilkšanu grafā Γ apzīmēsim ar Γ / e.

Virsotnes pievienošana. Tiek pievienota viena jauna virsotne un šķautnes, kas to savieno ar visām iepriekš eksistējošām virsotnēm.

Šķautnes pievienošana. Tiek pievienota šķautne, kas savieno divas izvēlētas nesavienotas virsotnes, šķautnes e pievienošanu grafā Γ apzīmēsim ar $\Gamma + e$.

Inducēta apakšgrafa savilkšana. Dotā inducētā apakšgrafa vietā pievienojam jaunu virsotni, kas ir savienota ar tām virsotnēm (ārpus savilktā apakšgrafa virsotņu kopas), ar kurām ir bijusi savienota vismaz viena no savilktā apakšgrafa virsotnēm. Speciālgadījums - divu virsotņu identifikācija.

1.2. Datu struktūras grafu uzdošanai

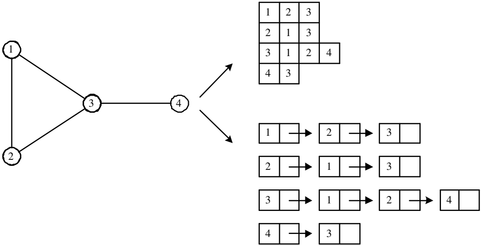
Grafus, tāpat kā jebkurus citus matemātiskus objektus, ir jāprot pilnvērtīgi un ekonomiski iekodēt ar piemērotu diskrētās matemātikas objektu palīdzību.

Ir vismaz divi būtiski dažādi datu struktūru veidi, kurus izmanto, lai uzdotu grafus.

1.2.1. Virsotņu blakusattiecības saraksts

Katrai virsotnei piekārtosim visas virsotnes, kas ar to ir savienotas.

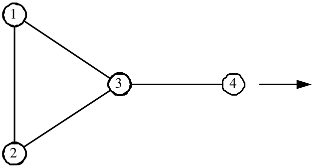
Praktiski blakusattiecības sarakstu realizē divdimensionāla masīva vai saistītā saraksta veidā.



3.24. attēls. Grafa uzdošana ar blakusattiecības sarakstu

1.2.2. Virsotņu blakusattiecības matrica

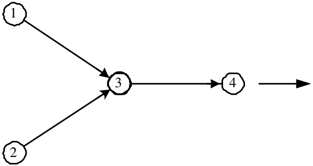
Grafu uzdod ar $|V| \times |V|$ bināru matricu, kurā rindas un kolonnas tiek indeksētas ar grafa virsotnēm noteiktā kārtībā, matricas rūtiņā, kas atbilst rindai u un kolonnai v tiek ierakstīts 1, ja virsotnes u un v ir savienotas, un 0, ja tās nav savienotas.



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

3.25. attēls. Neorientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts 1 tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) (no v uz u).



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0

3.26. attēls. Orientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta nosvērta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts skaitlis w tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) ar svaru w, pārējās rūtiņās tiek ierakstīta 0 tāpat kā iepriekšējos gadījumos;

2. Grafu izomorfisms un invarianti

2.1. Izomorfizms

Dabiski ir uzdot jautājumu - kad divi grafi ir neatšķirami kā matemātiski objekti jeb, citiem vārdiem sakot, kad divi grafi ir "vienādi", ja mēs ignorējam to virsotņu dabu un attēlošanas veidu.

Tā kā grafs ir struktūra, kas satur informāciju par virsotņu savienojamību vai nesavienojamību, piemēram, matricas veidā, tad dabiski ir pieprasīt, ka divi grafi ir matemātiski neatšķirami, ja to virsotņu kopas var sakārtot tā, ka grafu matricas ir vienādas.

Divus neorientētus vai orientētus grafus

$$\Gamma = (V, E),$$
$$\Gamma' = (V', E')$$

sauksim par *izomorfiem* ($\Gamma \simeq \Gamma'$), ja eksistē bijektīva funkcija

$$f : V \to V'$$

tāda, ka

$$(v_1, v_2) \in E$$

tad un tikai tad, ja

$$(f(v_1), f(v_2)) \in E'.$$

Var redzēt, ka Γ un Γ' blakusattiecības matricas ir vienādas, ja to rindu (un kolonnu) indeksi ir sakārtoti kārtībā

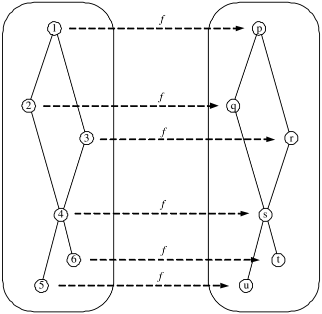
$$(v_1, v_2, ..., v_n) \text{ un}$$
$$(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)).$$

Šādā gadījumā funkciju f sauksim par *grafu izomorfismu*.

Bieži vien izomorfus grafus identificē un neatšķir vienu no otra.

Pētot grafus ar precizitāti līdz izomorfismam, bieži vien nodzēš grafu virsotņu indeksus un strādā ar grafiem, kuriem virsotnes ir neiezīmētas.

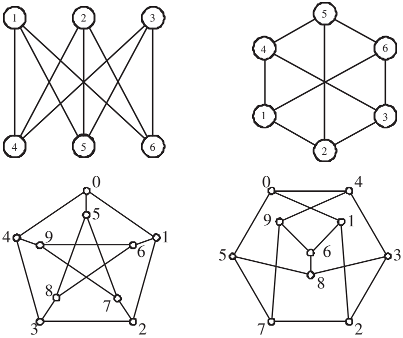
2.1. piemērs. 3.27.attēlā ir parādīts izomorfisma piemērs



3.27. attēls. Grafu izomorfisma piemērs

Par grafa Γ *izomorfisma tipu (klasi)* sauksim visu ar Γ izomorfo grafu kopu.

Bijektīvu funkciju $f : V \to V$ sauksim par *grafa* V *automorfismu* (Γ-*automorfismu*), ja tā ir grafa Γ izomorfisms uz sevi, citiem vārdiem sakot, $(v_1, v_2) \in E$ tad un tikai tad, ja $(f(v_1), f(v_2)) \in E$.

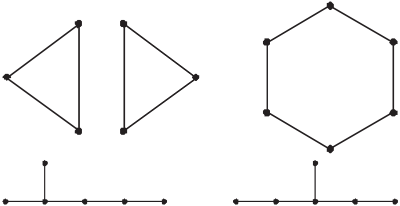


3.28. attēls. Izomorfu grafu pāru piemēri

2.2. piemērs. 3.28.attēlā ir parādīti izomorfu grafu pāri.

3.29.attēlā ir parādīti neizomorfu grafu pāri, kuriem pakāpju vektori ir vienādi.

2.3. piemērs. Apskatīsim mazu grafu automorfismu kopas. 3.30.attēlā

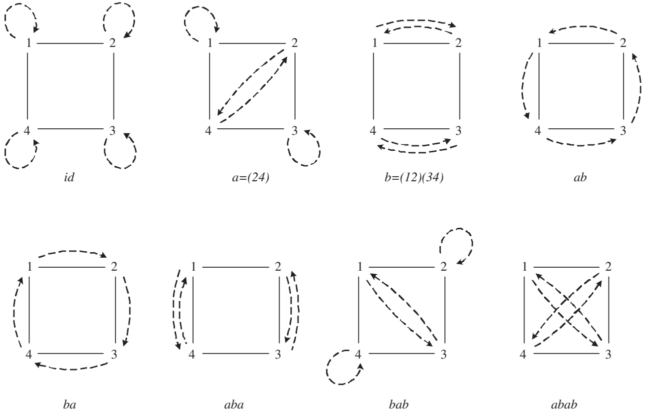


3.29. attēls. Neizomorfu grafu pāru piemēri

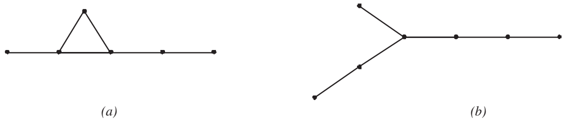
ir parādīti visi cikla C_4 automorfismi. Var redzēt, ka $|Aut(C_4)| = 8$ un par minimālu veidotājsistēmu var izvēlēties divu funkciju kopu, kas atbilst virsotņu permutācijām $a = (24)$ un $b = (12)(34)$.

2.4. piemērs. 3.31.attēlā attēloto grafu automorfismu grupas satur tikai vienu elementu - vienības funkciju.

Grafa automorfismu grupu var uzskatīt par grafa simetrijas mēru - jo lielāka ir attiecība $\frac{|Aut(\Gamma)|}{|V(\Gamma)|}$, jo grafs ir simetriskāks.



3.30. attēls. Visi cikla C_4 automorfismi



3.31. attēls. Grafi ar triviālu automorfismu grupu

2.2. Invarianti

Vienkāršs veids, kā noteikt, vai divi grafi ir izomorfi, ir fiksēt viena grafa matricu un apskatīt visas otrā grafa matricas, kas atbilst dažādām virsotņu kopas permutācijām.

Pētot, vai divi grafi ir izomorfi, ir lietderīgi izmantot to (skaitliskās) īpašības, kuras sakrīt izomorfiem grafiem un var nesakrist neizomorfiem grafiem.

Apzīmēsim visu grafu kopu ar G un fiksēsim kādu kopu S.

Funkciju $\phi : G \to S$ sauksim par *grafu invariantu*, ja

$$\Gamma \simeq \Gamma' \Longrightarrow \phi(\Gamma) = \phi(\Gamma').$$

Ekvivalenta definīcija:

$$\phi(\Gamma) \neq \phi(\Gamma') \Longrightarrow \Gamma \not\simeq \Gamma'.$$

2.1. piezīme. $\phi(\Gamma) = \phi(\Gamma') \not\Rightarrow \Gamma \simeq \Gamma'$.

No invariantiem var veidot sistēmas (piemēram, virknes), tādējādi konstruējot jutīgākus invariantus.

Invariantu sistēmu $\{\phi_i\}_{i \in I}$ sauksim par *pilnu*, ja

$$\phi_i(\Gamma) = \phi_i(\Gamma'),\ \forall\, i \in I \implies \Gamma \simeq \Gamma'.$$

Invariantus izmanto, lai atšķirtu neizomorfus grafus: ja uz diviem grafiem invariants pieņem dažādas vērtības, tad uzreiz var secināt, ka grafi nav izomorfi.

Uz šo brīdi nav zināma pilna un viegli aprēķināma invariantu sistēma.

2.3. Apakšgrafu invarianti

Apzīmēsim ar $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ to Γ apakšgrafu skaitu, kas ir izomorfi ar Δ.

2.5. piemērs. Ja $\Delta = K_1$ (triviālais grafs), tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |V(\Gamma)|$.
Ja $\Delta = K_2$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |E(\Gamma)|$.
Ja $\Delta = K_3$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ ir vienāds ar trijstūru skaitu grafā.

2.1. teorēma. Ja $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad katram Δ izpildās vienādība

$$\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = \mathcal{N}_\Delta(\Gamma').$$

PIERĀDĪJUMS Skaitļus $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ un $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma')$ viennozīmīgi nosaka grafu matricas. Tā kā $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad ir iespējams sakārtot Γ' virsotnes tā, ka matrica ir vienāda ar Γ matricu, tāpēc izpildās vienādība. ■

Redzam, ka katram Δ funkcija $\mathcal{N}_\Delta$ ir grafu invariants.

Pārskaitīsim vienkāršākos $\mathcal{N}_\Delta$ tipa invariantus:

- virsotņu skaits ($\Delta = K_1$),
- šķautņu skaits ($\Delta = K_2$),
- trijstūru skaits ($\Delta = K_3$),
- dota lieluma kliķu skaits grafā vai tā papildinājumā ($\Delta = K_n$ vai $\Delta = O_n$),
- virsotņu skaits ar dotu pakāpi (Δ ir zvaigzne ar dotu staru skaitu),
- dota garuma vienkāršu ķēžu skaits ($\Delta = P_n$),
- dota garuma vienkāršu ciklu skaits ($\Delta = C_n$).

2.4. Grafu metriskie invarianti

Svarīga invariantu klase ir invarianti, kas ir saistīti ar virsotnes savienojošo ķēžu īpašībām.

Grafu teorijā var definēt ģeometriskā attāluma analogu.

Par *attālumu* starp divām virsotnēm v un w sauksim (v, w) - ķēžu garumu minimumu, attālumu starp virsotnēm v un w apzīmēsim ar $dist(v, w)$:

$$dist : V \times V \to \mathbb{N} \cup 0.$$

Papildus tam attālumu starp divām virsotnēm dažādās komponentēs definēsim vienādu ar $+\infty$.

2.2. teorēma. Attāluma funkcija apmierina šādas īpašības:

1) jebkurām virsotnēm v un w izpildās

$$dist(v, w) = dist(w, v)$$

(simetrija);

2) $dist(v, w) = 0$ tad un tikai tad, ja $v = w$ (nedeğenerētība);

3) jebkurām virsotnēm v,w un u izpildās

$$dist(v, w) \leq dist(v, u) + dist(u, w)$$

(trijstūra nevienādība).

PIERĀDĪJUMS Pirmie divi apgalvojumi ir acīmredzami. Lai pierādītu trešo apgalvojumu, pieņemsim pretējo. Ja eksistē virsotne u tāda, ka

$$dist(v, w) > dist(v, u) + dist(u, w),$$

tad tā ir pretruna, jo tad eksistē maršruts no v uz w caur u, kura garums ir mazāks kā $dist(v, w)$. ■

Par sakarīga grafa *diametru* sauksim maksimālo attālumu starp divām virsotnēm grafā, jeb, citiem vārdiem sakot, attāluma funkcijas maksimālo vērtību grafā, šo lielumu grafam Γ apzīmēsim ar $D(\Gamma)$.

Ķēdi, kuras garums ir vienāds ar grafa diametru, sauksim par *diametrālu ķēdi*.

Par virsotnes v *ekscentritāti* sauksim attāluma funkcijas maksimālo vērtību, ja viens no tās argumentiem ir v, citiem vārdiem sakot, maksimālo attālumu no šīs virsotnes līdz kādai citai virsotnei dotajā grafā, virsotnes v ekscentritāti apzīmēsim ar $\epsilon(v)$.

Par grafa *centru* sauksim inducēto apakšgrafu, kura virsotņu kopu veido grafa virsotņes ar minimālo ekscentritāti, to apzīmēsim ar $Z(\Gamma)$.

Centra virsotņu ekscentritāti sauksim par grafa *rādiusu*, to apzīmēsim ar $r(\Gamma)$.

Virsotnes, kuru ekscentritāte ir vienāda ar grafa diametru, sauksim par *perifērijas virsotnēm*.

3. Sakarīgums

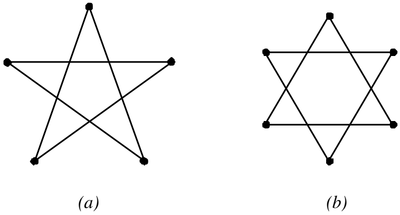
3.1. Sakarīgums neorientētos grafos

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē ķēde starp jebkurām divām virsotnēm.

Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauksim par grafa *sakarības komponenti*.

Var redzēt, ka grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, ja eksistē virsotne v tāda, ka jebkurai citai virsotnei u eksistē maršruts $(u, ..., v)$.

3.1. piemērs. 3.12.attēla grafs (a) ir sakarīgs un grafs (b) nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



3.12. attēls. Sakarīga un nesakarīga grafa piemēri

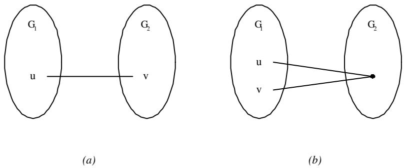
3.1. teorēma. Grafs ar n virsotnēm un mazāk kā $n-1$ šķautni nav sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim grafā kādu virsotni v. Ja grafs ir sakarīgs, tad eksistē ķēde no v līdz jebkurai no pārējām $n-1$ virsotnēm, tātad grafā ir vismaz $n-1$ šķautne. ■

3.2. teorēma. Ja grafs nav sakarīgs, tad tā papildgrafs ir sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs Γ nav sakarīgs. Tad tam eksistē vismaz divas komponentes Γ_1 un Γ_2. Mums ir jāpierāda, ka jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi papildgrafā $\overline{\Gamma}$.

Ja virsotnes pieder dažādām komponentēm, tad papildgrafā tās var savienot ar vienu šķautni vai, citiem vārdiem sakot, eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 1 (skatīt 3.13.(a) attēlā).



3.13. attēls. Ilustrācija pierādījumam

Ja abas virsotnes pieder vienai komponentei, tad tās papildgrafā var savienot ar divām šķautnēm un vienu virsotni citā komponentē, tātad eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 2 (skatīt 3.13.(b) attēlā). ■

3.2. piemērs. Valstī ir 15 pilsētas, katra no kurām ir savienota ar ne mazāk kā 7 citām pilsētām. Pierādīt, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu (iespējams, ar pārsēšanos).

(Vispārinājums: n virsotnes, katras virsotnes pakāpe nav mazāka kā $[\frac{n-1}{2}]$.)

Virsotni sauksim par *šarnīru*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Šķautni sauksim par *tiltu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

3.3. teorēma. Jebkurā sakarīgā grafā ar vismaz divām virsotnēm ir vismaz divas virsotnes, kas nav šarnīri.

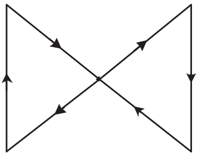
PIERĀDĪJUMS Jebkuras diametrālas ķēdes gali nevar būt šarnīri.
■

3.3. piemērs. Uzzīmējiet grafu ar 3 šarnīriem un 33 tiltiem, 33 šarnīriem un 3 tiltiem.

Uzzīmējiet grafu, kurā eksistē šarnīrs un katras virsotnes pakāpe ir vienāda ar 3.

Kādā valstī no katras pilsētas iziet 100 ceļi, no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu. Pierādīt, ka var slēgt jebkuru vienu ceļu un joprojām no jebkuras pilsētas varēs aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

Kādā valstī ir vairāk kā 101 pilsēta, dažas pilsētas ir savienotas ar (divvirziena) ceļiem. Galvaspilsēta ir savienota ar 100 pilsētām, katra pilsēta, kas nav galvaspilsēta, ir savienota ar tieši 10 citām pilsētām. No jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu. Pierādīt, ka var slēgt vismaz pusi no visiem ceļiem, kas iziet no galvaspilsētas tā, lai joprojām no jebkuras pilsētas varētu aizbraukt uz jebkuru citu.



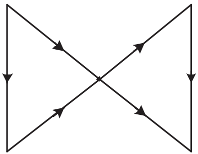
3.37. attēls. Stingri sakarīga grafa piemērs

3.2. Sakarīgums orientētos grafos

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs. Virsotnes v un w sauksim par *stingri sakarīgām*, ja eksistē virzītas ķēdes, kas saista v un w (abos virzienos), v un w sauksim par *vienpusīgi sakarīgām*, ja eksistē virzīta ķēde, kas saista v un w vismaz vienā virzienā.

Orientētu grafu sauksim par stingri sakarīgu, ja jebkuras divas virsotnes ir stingri sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par vienpusīgi sakarīgu, ja jebkuras divas vir-



3.38. attēls. Vienpusīgi sakarīga grafa piemērs

sotnes ir vienpusīgi sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par *vāji sakarīgu (sakarīgu)*, ja tam atbilstošais neorientētais grafs ir sakarīgs.

Par orientēta grafa *stingri sakarīgu komponenti* sauksim maksimālu stingri sakarīgu apakšgrafu.

Par orientēta grafa *vājās sakarības komponentēm* sauksim sakarības komponentes grafā, ko iegūst no dotā orientētā grafa, aizmirstot par šķautņu orientāciju.

3.4. piemērs. Kādā valstī jebkuras divas pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļu. Pierādīt, ka eksistē pilsēta, no kuras var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

(Ar vienas šķautnes pārorientāciju pilnu orientētu grafu var pārvērst par stingri sakarīgu) Kādā valstī jebkuras divas pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļu. Pierādīt, ka eksistē ceļš, kurā nomainot virzienu uz pretējo var panākt, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu

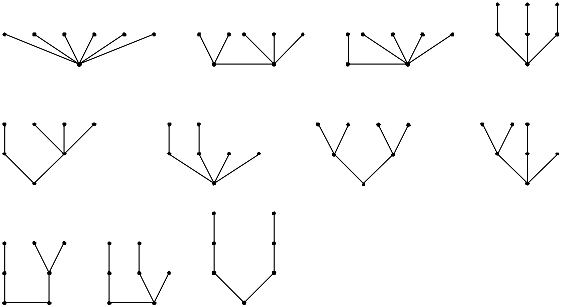
4. Koki

Par *koku* sauksim sakarīgu grafu bez cikliem.

Grafa apakšgrafu, kas satur visas virsotnes un ir koks, sauksim par grafa *pārklājošo koku*.

Vienkāršākās koku īpašības:

- katra koka virsotne, kuras pakāpe ir lielāka nekā 1, ir šarnīrs,
- katra koka šķautne ir tilts,
- katrs koks ir pārklājošais koks attiecībā uz sevi.



3.41. attēls. Visi koku izomorfisma tipi ar 7 virsotnēm

4.1. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - grafs ar $|V|$ virsotnēm un $|E|$ šķautnēm. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ - koks;
2) Γ - sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$;
3) Γ - aciklisks grafs un $|E| = |V| - 1$;
4) grafā Γ jebkuras divas dažādas virsotnes savieno tieši viena ķēde;
5) Γ - aciklisks grafs, kuram pievienojot vienu jaunu šķautni iegūst grafu ar tieši vienu ciklu.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu, izmantojot ciklisko pierādīšanas tehniku. Ir jāpierāda, ka $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (1)$.

$(1) \to (2)$: izmantosim matemātisko indukciju ar argumentu $|V|$. Indukcijas bāze: ja $|V| = 1$, tad izteikums ir acīmredzams. Ja $|V| > 1$, tad jebkurai šķautnei e grafs $\Gamma - e$ satur 2 komponentes - kokus (grafā Γ nav ciklu) T_1 un T_2. Pieņemsim, ka šajās komponentēs ir $|V_1|$

vai $|V_2|$ virsotnes un $|E_1|$ vai $|E_2|$ šķautnes, kas saskaņā ar induktīvo pieņēmumu apmierina nosacījumus $|E_i| = |V_i| - 1$. Iegūstam, ka

$$|E| = |E_1|+|E_2|+1 = (|V_1|-1)+(|V_2|-1)+1 = (|V_1|+|V_2|)-1 = |V|-1.$$

(2) → (3): Γ ir sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$. Jāpierāda, ka grafā nav ciklu. Pieņemsim, ka eksistē cikls, kas satur šķautni e. Grafs $\Gamma - e$ ir sakarīgs un satur $|V| - 2$ šķautnes. Tāds grafs nevar būt sakarīgs, jo tam šķautņu skaits ir par 2 mazāks nekā virsotņu skaits.

(3) → (4): pieņemsim, ka Γ ir aciklisks un $|E| = |V| - 1$. Pieņemsim, ka grafa komponenšu skaits ir C un i-tās komponentes virsotņu un šķautņu skaits ir $|V_i|$ un $|E_i|$. Tā kā katra komponente ir koks, tad $|E_i| = |V_i| - 1$ un

$$|E| = \sum_{i=1}^{C} (|V_i| - 1) = |V| - C.$$

Redzam, ka $C = 1$ un grafs ir sakarīgs. Ja eksistētu 2 virsotnes, kuras saista 2 dažādas ķēdes, tad eksistētu cikls.

(4) $\rightarrow$ (5)**:** ja grafā Γ būtu cikls, tad eksistētu divas dažādas ķēdes, kas savienotu divas virsotnes. Ja, pievienojot vienu šķautni, iegūtu divus dažādus ciklus, tad sākotnējā grafā starp attiecīgajām virsotnēm eksistētu divas dažādas ķēdes.

(5) $\rightarrow$ (1)**:** pierādīsim, ka grafs Γ ir sakarīgs. Ja virsotnes u un v piederētu 2 dažādām komponentēm, tad, pievienojot šķautni (u, v), mēs neiegūtu ciklu.

■

4.1. piezīme. Ja sakarīgam grafam ar n virsotnēm ir vismaz n šķautnes, tad tas satur ciklu.

4.2. teorēma. Kokā ir vismaz 2 virsotnes ar pakāpi 1.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka kokā T ir $|V|$ virsotnes. Tā kā

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(|V| - 1),$$

tad vismaz 2 saskaitāmie kreisajā pusē ir vienādi ar 1. ■

4.3. teorēma. Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.

PIERĀDĪJUMS Ja grafs sākotnēji nav koks, tad pakāpeniski pa vienai izdzēsīsim šķautnes, kas ieiet ciklos, katrā solī izdzēšot jebkuru no šķautnēm, kas piedalās kādā no cikliem.

Tā kā neviena šāda šķautne nevar būt tilts, tad tās izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu.

Katrā šādā šķautnes izdzēšanas operācijā virsotņu skaits nemainās, bet šķautņu skaits samazinās par 1.

Pēc galīga skaita soļu mēs iegūsim sakarīgu grafu, kuram izpildās nosacījums $|E| = |V| - 1$, tādējādi šis jauniegūtais grafs ir sākotnējā grafa apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un ir koks. ■

4.4. teorēma. Katrs koks ir divdaļīgs grafs.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

4.1. piemērs. Kādā valstī ir 2008 pilsētas. Uzbūvējiet šādā valstī ceļu tīklu tā, lai tas saturētu minimāli iespējamo (divvirziena) ceļu skaitu, un no jebkuras pilsētas varētu aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu braucot pa ne vairāk kā

a) 22 ceļiem;

b) 2 ceļiem.

Baktērija sadalījās 4 daļās, pēc tam katra jaunradīta baktērija dalījās 2 vai 3 daļās vai nedalījās. Pēc kāda laika baktēriju skaits bija 2008. To baktēriju skaits, kas sadalījās 2 daļās ir divas reizes lielāks nekā to baktēriju skaits, kas sadalījās 3 daļās. Cik baktērijas dalījās?

Volejbola tīklam ir taisnstūrveida rūtiņas, 40×500. Kāds ir maksimālais virvīšu skaits, kuras var pārgriezt tā. lai tīkls nesadalītos divās daļās?

5. 12.mājasdarbs

5.1. Tipveida uzdevumi

2.1 Kā grafu iekodēt virknes veidā?

2.2 Atrodiet blakusattiecības matricas visiem regulāro daudzskaldņu grafiem.

2.3 Atrodiet visus automorfizmus šādiem grafiem:

(a) ķēdei ar garumu n,
(b) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$,
(c) apvienojumam $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_1$.

2.4 Atrodiet diametru un centru šādiem grafiem:

(a) ķēdei ar garumu n,
(b) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$,
(c) kuba grafam,
(d) Petersena grafam.

5.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.5 Atrodiet visus automorfizmus šādiem grafiem:

(a) oktaedra grafam,

(b) Petersena grafam,

(c) apvienojumam $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2$.