DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Studiju kurss

Grafu teorija

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Ievads

Docētājs - Pēteris Daugulis, Ph.D., DU vadošais pētnieks

Tālr.: DU Dabaszinātņu un matemātikas fakultātes matemātikas katedras telefons,

E-pasts: peteris.daugulis@du.lv

Webvieta lekciju materiāliem, mājasdarbiem un citai informācijai:

http://www.de.dau.lv/matematika/

Pārbaudes formas:

- rakstiski mājasdarbi,
- rakstisks eksāmens.

Kontroldarba un eksāmena darba izpildes laikā atļauts izmantot personīgos lekciju konspektus, docētāju sagatavotus metodiskos materiālus un vispārīga rakstura mācību grāmatas. Visi uzdevumi ir jāpilda pilnīgi patstāvīgi.

Literatūra:

- grāmatas par grafu teoriju latviešu valodā, atslēgas vārdi - grafu teorija, diskrētā matemātika - Dambītis, Strazdiņš, Daugulis-Mickāne.
- grāmatas par grafu teoriju krievu un angļu valodā, atslēgas vārdi - graph theory, discrete mathematics.
- Papildliteratūra - augstākā matemātika.
- Internet resursi - www.wikipedia.org.

Lekcijas mērķis:

- apskatīt grafu teorijas pamatjēdzienus.

2. Ievads grafu teorijā

2.1. Motivācija

Viens no fundamentāliem matemātikas pamatjēdzieniem ir *attiecība* - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopu elementu pāriem.

Attiecības, tāpat kā citus matemātiskus jēzienus, ir vēlams vizualizēt. Pareizi vizuāli iekodēta informācija ir vieglāk uztverama un apstrādājama nekā jebkura cita veida informācija. Par vizualizāciju var domāt kā par pētāmās sistēmas pirmapstrādi (preprocesingu), kuras rezultātā sistēma tiek iekodēta tādā veidā, ka tā var tikt apstrādāta ātrāk.

Attiecības var vizualizēt šādā veidā:

- kopu elementus kā elementārus (nedalāmus, atomārus) objektus parasti attēlo kā punktus vai aplīšus ar tajos ierakstītu informāciju;

- tā kā attiecība ir īpašība, kas saista elementu pārus, tad šo īpašību ir pieņemts attēlot kā elementus saistošas nepārtrauktas līnijas (šķautnes, bultiņas, nogriežņus) ar tādu papildinformāciju, kas ir nepieciešama pareizai uzdevuma nosacījumu grafiskai iekodēšanai, parasti šī papildinformācija ir šķautņu vai virsotņu parametri jeb "svari".

Šādu attiecības vizualizācijas veidu sauksim par tās *grafu* (no grieķu valodas).

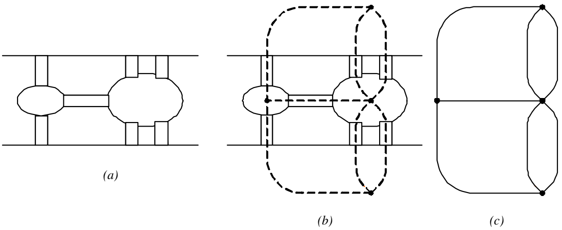
Attiecības vizualizācija grafa veidā palīdz to analizēt gan teorētiski, gan arī eksperimentāli, izmantojot informācijas tehnoloģijas.

Grafu teorija ir matemātikas sadaļa, kas satur

- attiecību pētīšanu izmantojot vizuālo pamatu,
- grafu kā diskrētu ģeometrisku objektu pētīšanu.

Grafu pielietošana matemātikas uzdevumu risināšanā sākās 18.gadsimta vidū (1736.gadā) ar matemātiķa L.Eilera darbiem. Terminam *grafs* ir vairāki sinonīmi - *diagramma*, *struktūra* u.c.

2.1. piemērs. Viens no pirmajiem publicētajiem grafu pielietošanas piemēriem ir "uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem". Ir dota upe, kurā ir divas salas un vairāki tilti.



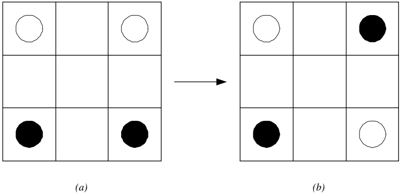
3.1. attēls. Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

Vai ir iespējams iziet no kāda punkta, pāriet katru tiltu tieši vienu reizi un atgriezties sākotnējā punktā?

Tā kā uzdevuma risināšanā nozīmīga loma ir tiltiem, un trajektorijas, pa kurām tiek iets, nav svarīgas, tad modelēsim uzdevumu šādā veidā: piekārtosim katram sauszemes gabalam vienu punktu un saistīsim divus punktus ar līniju tad un tikai tad, ja atbilstošie sauszemes gabali ir saistīti ar tiltu.

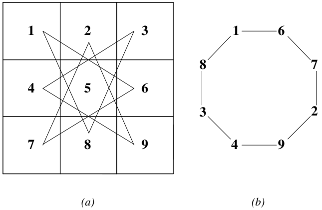
Ja uzdevumam eksistētu atrisinājums, tad iegūtajā grafā eksistētu noslēgts "ceļš", kurā tiek iets pa šķautnēm un kurš saturētu katru šķautni tieši vienu reizi. Ja eksistē tāds ceļš, tad katrai virsotnei ir jābūt ar pāra skaita šķautnēm. Bet šajā grafā ir virsotnes, kurām atbilst nepāra skaits šķautņu, tātad uzdevumam nav atrisinājuma.

2.2. piemērs. (No skolēnu olimpiāžu krājumiem). Uz 3×3 "šaha galda" ir izvietoti divi balti un divi melni zirgi tā, kā parādīts 3.2.(a) attēlā. Vai ir iespējams tos pārvietot uz stāvokli, kas parādīts 3.2.(b) attēlā, ja divas figūras nevar atrasties vienā lauciņā?



3.2. attēls. Uzdevums par četriem šaha zirgiem

Šajā uzdevumā izšķiroša loma ir rūtiņām un to savstarpējam izvietojumam, precīzāk, tam, vai rūtiņas saistītas ar zirga gājienu. Modelēsim uzdevumu šādi: piekārtosim katram laucinam vienu virsotni un saistīsim divas virsotnes ar līniju, ja atbilstošie laucini ir saistīti ar zirga gājienu (skatīt 3.3.(a) attēlā).



3.3. attēls. Grafs uzdevumam par četriem šaha zirgiem

Tagad aizmirsīsim par šaha galdu kā fizikālu objektu un pārkārtosim grafa virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt 3.3.(b) attēlā).

Var redzēt, ka uzdevumam nav atrisinājuma, jo sākuma stāvoklī starp diviem baltajiem zirgiem nav melnā zirga, bet beigu stāvoklī starp tiem ir jābūt melnajam zirgam, grafa šķautnes ir izvietotas tā, ka divi blakus esoši zirgi nevar pārlēkt viens otram pāri.

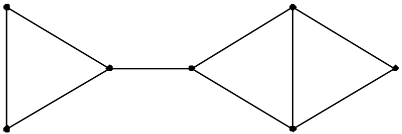
2.2. Grafu klases

Definēsim plašāk izmantotās grafu klases.

Neorientētie grafi. Par *grafu* (*neorientētu grafu*) sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa *virsotņu kopa* un E ir grafa *neorientētu šķautņu kopa*.

Parasti ar terminu *grafs* pēc noklusēšanas tiek domāts *neorientēts grafs*.

Ja $\Gamma = (V, E)$ ir neorientēts grafs, tad tā virsotņu skaitu apzīmēsim ar $|V|$ un šķautņu skaitu apzīmēsim ar $|E|$.

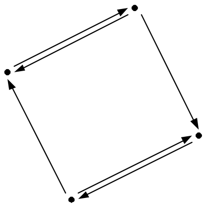


3.6. attēls. Neorientēta grafa piemērs

Divas neorientēta grafa virsotnes v_1, v_2 sauksim par *blakusvirsotnēm* (*savienotām virsotnēm*), ja $(v_1, v_2) \in E$, apzīmēsim to ar $v_1 \sim v_2$.

Orientētie grafi. Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - orientēta grafa virsotņu kopa, E - *orientētu šķautņu kopa*.

Šķautni (u, v) parasti sauc par virsotnes u izejošo šķautni, un šķautni (v, u) - par u ieejošo šķautni.



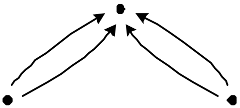
3.7. attēls. Orientēta grafa piemērs

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu, ”aizmirstot” šķautņu orientāciju.

Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

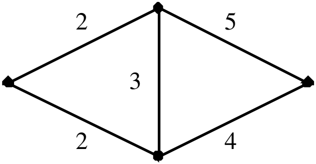
Var apskatīt *orientētu grafu ar cilpām.*

Multigrafi. Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām.



3.8. attēls. Orientēta multigrafa piemērs

Grafi ar svariem. Par *nosvērtu grafu* (*grafu ar indeksētām virsotnēm* un/vai *šķautnēm*) sauksim grafu, kura katrai virsotnei un/vai šķautnei var būt piekārtots skaitlis, vairāki skaitļi vai citu kopu elementi.



3.9. attēls. Nosvērta grafa piemērs

Hipergrafi. Grafa jēdzienu var vispārināt šādā veidā. Ja V ir netukša kopa (virsotņu kopa) un $E \subseteq P(V)$, tad pāri $X = (V, E)$ sauksim par *hipergrafu*. Tādējādi hipergrafa "šķautnes" (kopas E elementi) atbilst virsotņu kopas V patvaļīgām apakškopām.

2.3. Grafu modeļi

2.3.1. Modeļu teorija

Jebkuras dabas un izcelsmes sistēmas vai procesa uzdošanu matemātisku objektu un sakarību veidā sauksim par šīs parādības *modeli*.

Modeļi tiek veidoti ar mērķi labāk saprast doto sistēmu.

Galvenie grafu modeļu tipi ir šādi:

- virsotnes un šķautnes ir fiziski objekti, šķautņu objekti fiziski saista virsotņu objektus;
- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, šķautnes saista virsotnes atkarībā no to īpašībam;
- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, iespējams, dažādos laika vai attīstības stāvokļos, šķautnes norāda stāvokļu attīstību (piemēram, laikā);

Lai izveidotu efektīvu dotās sistēmas/procesa grafu modeli, ir

1) jānosaka svarīgākās dotās modelējamās sistēmas apakšsistēmas/ stāvokļi, kas tiks definētas kā grafa virsotnes;
2) jānosaka svarīgākās modelējamās attiecības starp virsotņu objektiem.

Pēc modeļa izveidošanas tiek risināti uzdevumi, kas attiecas uz modelējamo sistēmu.

2.3.2. Grafu modeļu piemēri

Zemāk ir pārskaitīti daži konkrēti grafu modeļi:

1. *matemātisku apgalvojumu grafs* (virsotnes - apgalvojumi, šķautnes - loģiskās secināšanas);
2. *funkcionālais grafs* (virsotnes - kopas elementi, šķautnes - funkcijas darbība);

3. *lielumu-sakarību grafs* (virsotnes - skaitliski lielumu un sakarības starp tiem, šķautnes - lieluma piedalīšanās sakarībā);
4. *metrikas grafs* (virsotnes - jebkura veida fiziski vai nefiziski objekti vai to kopas, šķautnes - objektu ģeometriskā, strukturālā, funkcionālā vai evolucionārā tuvība, pielieto lielu kopu analīzē);
5. *sistēmas grafs* (virsotnes - sistēmas komponentes, šķautnes - komponenšu mijiedarbība, pielieto sistēmu projektēšanā un analīzē);
6. *spēles grafs* (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - spēles noteikumu atļautas pārejas (gājieni) starp stāvokļiem, pielieto spēļu uzvarošo stratēģiju izstrādāšanā);
7. *datortīkls* (vispārīgā gadījumā - komunikāciju tīkls) (virsotnes - datori vai komunikāciju mezgli, šķautnes - sakaru līnijas, pielieto datortīklu projektēšanā un analīzē);
8. *sociālais grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - pazīšanās, ekonomiskas vai cita veida attiecības, pielieto sabiedrības analīzē un attīstības plānošanā);

9. *darbinieku-pienākumu grafs* (virsotnes - darbinieki un pienākumi vai darbi, šķautnes - attiecības, kas darbiniekiem piekārto to iespējamos pienākumus);
10. *ģenealoģiskais koks* (virsotnes - cilvēki, šķautnes - "vecāku-bērnu" attiecības);
11. *ceļu grafs* (virsotnes - pilsētas, šķautnes - ceļi);
12. *ielu grafs* (virsotnes - krustojumi, šķautnes - ielas);
13. *asinsvadu grafs* (virsotnes - asinsvadu sazarojumi, šķautnes - asinsvadi).

Matemātiskajās sacensībās bieži tiek piedāvāti uzdevumu ar šādiem modeļiem:

- sociālie grafi (draugi, pazīšanās);
- transporta vai sakaru tīklu grafi (ielas, pilsētas un ceļi, ezeri, salas un upes, datortīkli);
- sacensību grafi (virsotnes - komandas, orientētas šķautnes - spēļu iznākumi);

- kopu iekļaušanas grafi (virsotnes - kopas, šķautnes - iekļaušana);
- šaha galds (virsotnes - lauciņi);
- daudzskaldņu grafi (virsotnes - ģeometriskās virsotnes, šķautnes - ģeometriskās šķautnes);
- plakanu līniju līniju grafi (virsotnes - līniju daļu krustpunkti, šķautnes - līnju daļas starp krustpunktiem);
- ģenealoģiskie grafi (cilvēki, baktērijas);
- spēļu grafi (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - atļautie gājieni).

2.4. Pamatdefinīcijas

2.4.1. Vienādība un apakšgrafi

Jebkura tipa divus grafus sauksim par vienādiem, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$, un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas šķautnes, kas ir incidentas tikai kopas U elementiem.

Orientētā grafā Γ par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas sķautnes, kuru galapunkti un sākumpunkti ir kopā U.

Par *skeletālu apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kas satur visas grafas virsotnes.

Grafu Γ sauksim par *maksimālu* attiecībā uz kādu īpašību P, ja neeksistē grafs Γ' tāds, ka $\Gamma \subseteq \Gamma'$ un grafam Γ' piemīt īpašība P.

2.4.2. Virsotnes apkārtne

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_\Gamma(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne $(u, v)/(v, u)$, šīs kopas apzīmēsim ar $N_+(v)$ vai $N_-(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_-(v)$ apzīmēsim arī ar $\Gamma(v)$ un kopu N_+ - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *pakāpi* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar $d(v)$.

Par grafa *pakāpju vektoru* sauksim virkni $(a_0, ..., a_k)$, kur a_i ir grafa virsotņu skaits ar pakāpi i.

Virsotni, kuras pakāpe ir 0, sauksim par *izolētu* virsotni.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo puspakāpi* sauksim ar v incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb v pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

2.1. teorēma.

1. Grafa $\Gamma = (V, E)$ virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šķautņu skaitu:
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

2. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula

$$\sum_{v \in V} d_-(v) + \sum_{v \in V} d_+(c) = 2|E|.$$

3. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula

$$\sum_{v \in V} d_-(v) = \sum_{v \in V} d_+(c) = |E|.$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu "skaitīšana divos dažādos veidos".

Neorientēta grafa gadījumā skaitīsim katras virsotnes v incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm:

- no vienas puses, mēs iegūsim $\sum_{v \in V} d(v)$,
- no otras puses, tā kā katrai šķautnei ir divi galapunkti, tad katra šķautne tiks skaitīta divas reizes un summā iegūsim lielumu $2|E|$.

Līdzīga sprieduma ceļā iegūsim arī pirmo apgalvojumu orientētam grafam.

Otrais apgalvojums orientētajam grafam izsaka to, ka šķautņu izejošo galu ir tikpat, cik ieejošo galu.■

2.1. piezīme. Svarīgs secinājums neorientēto grafu gadījumā - virsotņu skaits ar nepāra pakāpēm ir pāra skaitlis:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{d(v_1) + ... + d(v_k)}_{\text{nepāra pakāpes}} + \underbrace{d(v_{k+1}) + ... + d(v_n)}_{\text{pāra pakāpes}} = 2|E|.$$

2.3. piemērs. Klasē ir 30 cilvēki. Vai var būt, ka 9 cilvēkiem ir 3 draugi, 11- 4 draugi un 10 - 5 draugi.

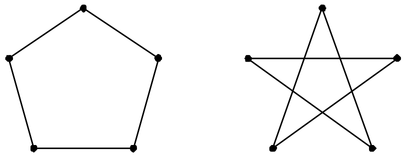
Valstī ir vairāki ezeri. Tiek apgalvots, ka no katra ezera iztek 4 upes, bet ietek 5 upes. Pierādīt, ka tas nav iespējams.

Kādā valstī ir galvaspilsēta un vēl 100 pilsētas. Pilsētas ir savienotas ar vienvirziena ceļiem. No katras pilsētas, kas nav galvaspilsēta, iziet 10 ceļi, bet ieiet 11 ceļš. Pierādīt, ka uz galvaspilsētu nevar aizbraukt ne no vienas citas pilsētas.

2.4.3. Papildgrafs

Par grafa $\Gamma = (V, E)$ *papildgrafu* jeb *papildinājumu* sauksim grafu $\overline{\Gamma} = (V, E')$, kurā divas virsotnes ir savienotas tad un tikai tad, ja tās nav savienotas grafā Γ.

2.4. piemērs. 3.11.attēla grafa (a) papildgrafs ir grafs (b).



(a) (b)

3.11. attēls. Grafa un tā papildgrafa piemērs

2.4.4. Staigāšana pa grafu

Uzdevumu risināšanā ir lietderīgi domāt par grafu kā par transporta vai sazināšanās tīkla modeli, tāpēc ir jādefinē vienkāršākie jēdzieni, kas ir saistīti ar pārejām starp virsotnēm.

Par *maršrutu* grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni

$$(v_0, e_1, ..., e_n, v_n),$$

kur jebkuras divas kaimiņu virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar šķautni e_{i+1}. Ja maršrutā $v_0 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *noslēgtu*, pretējā gadījumā, kad $v_0 \neq v_n$ - par *vaļēju*, šķautņu skaitu maršrutā sauksim par tā *garumu*;

Maršrutu, kurā visas šķautnes ir dažādas, sauksim par *ķēdi*;

Ķēdi, kurā visas virsotnes izņemot, iespējams, pirmo un pēdējo, ir dažādas, sauksim par *vienkāršu ķēdi*;

Noslēgtu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *ciklu*, noslēgtu vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *vienkāršu ciklu*.

Maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi), kura pirmā virsotne ir v un pēdējā - w, sauksim par (v, w) - maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi).

Par vienkāršu ķēdi vai vienkāršu ciklu ir lietderīgi domāt kā par grafa apakšgrafu, kas satur atbilstošās virsotnes un šķautnes starp virsotnēm.

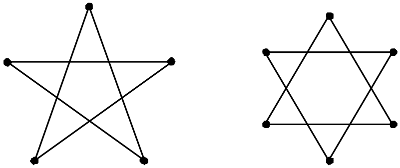
Analoģiski maršruta, ķēdes un cikla jēdzienus definē orientētiem grafiem. Par *virzītu maršrutu* orientētā grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, ..., e_n, v_n)$, kur jebkuras divas virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar (orientēto) šķautni e_{i+1}. Līdzīgā veidā definēsim arī virzītu ķēdi, vienkāršu ķēdi, ciklu un vienkāršu ciklu.

2.4.5. Sakarīgums

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē ķēde starp jebkurām divām virsotnēm.

Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauksim par grafa *sakarības komponenti*.

2.5. piemērs. 3.12.attēla grafs (a) ir sakarīgs un grafs (b) nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



(a) *(b)*

3.12. attēls. Sakarīga un nesakarīga grafa piemēri

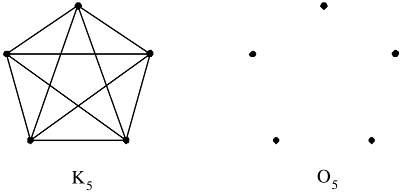
2.5. Grafu speciālgadījumi

Apskatīsim dažus speciālus grafus. Grafu speciālgadījumus var izmantot pieņēmumu pārbaudei vai atspēkošanai.

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm. Par *tukšo grafu* sauksim "grafu", kura virsotņu un šķautņu kopas ir tukšas.

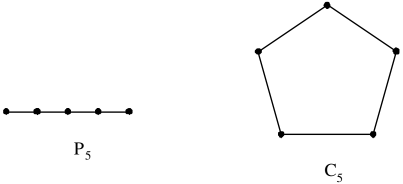
Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi virsotņu pāri savā starpā ir savienoti.

Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



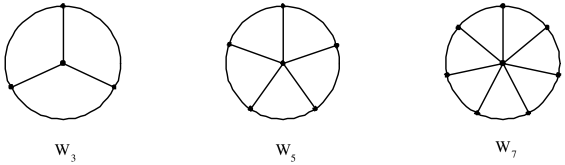
3.14. attēls. Pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri

Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2. *Cikls* C_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur katrai virsotnei pakāpe ir 2.



3.15. attēls. Ķēdes un cikla piemēri

Ritenis W_n - sakarīgs grafs ar $n+1$ virsotni, kur vienai virsotnei ir pakāpe n un pārējām - 3.



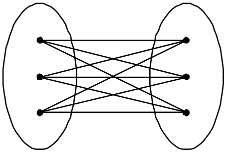
3.16. attēls. Riteņu piemēri

Divdaļīgs grafs - grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

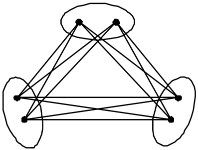
Pilns divdaļīgs grafs $K_{n,m}$ - divdaļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir n un m un kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.

m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt m daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns m-daļīgs grafs $K_{n_1,\ldots,n_m}$ - m daļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir $n_1, \ldots, n_m$, jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.



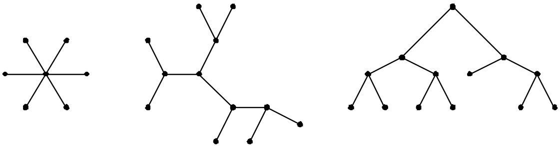
$K_{3,3}$



$K_{2,2,2}$

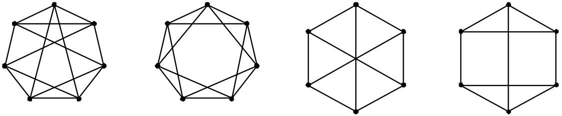
3.17. attēls. 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri

Koks - sakarīgs grafs bez inducētiem apakšgrafiem, kas ir cikli (sakarīgs *aciklisks* grafs). *Mežs* - grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs).



3.19. attēls. Mežs

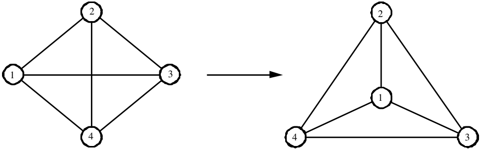
Regulārs grafs - grafs, kura visām virsotnēm ir vienāda pakāpe. Ja regulāra grafa virsotnes pakāpe ir k, tad to sauksim par k-regulāru grafu. Katram n atbilstošais cikls C_n un pilnais grafs K_n ir regulāri grafi.



3.20. attēls. 3-regulāru un 4-regulāru grafu piemēri ar 6 un 7 virsotnēm

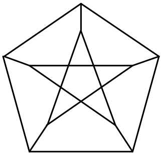
Plakans grafs - grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs - grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu (*plakanizēt*).



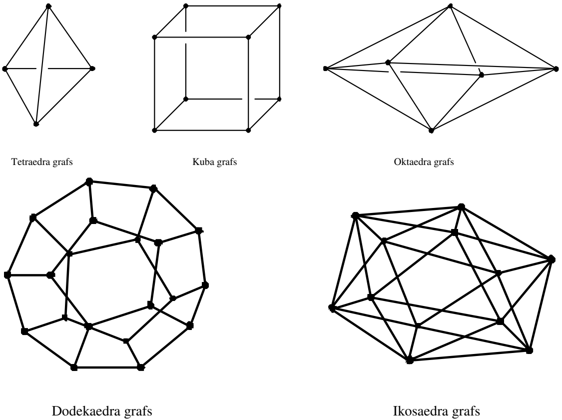
3.21. attēls. Planāra grafa plakanizācijas piemērs

Ir atrasti un pētīti vairāki interesanti grafi, kas ir nosaukti to atklājēju vārdos. Populārākais no šādiem grafiem ar nelielu virsotņu skaitu ir *Petersena grafs*:



3.22. attēls. Petersena grafs

Regulāro daudzskaldņu grafi tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), kur katram atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



3.23. attēls. Regulāro daudzskaldņu grafi

3. 1.mājasdarbs

3.1. Tipveida uzdevumi

1.1 Atrisiniet uzdevumu par četriem šaha zirgiem, kas ir izvietoti uz galda ar izmēriem 3×4.

1.2 Uz riņķa līnijas uzrakstīti 9 naturāli skaitļi. Katrā kaimiņu skaitļu pārī viens no skaitļiem dalās ar otru. Pierādīt, ka šī īpašība izpildās arī vismaz vienam citam (ne kaimiņu) skaitļu pārim.

1.3 Cik ir dažādu katra tipa (neorientētu, orientētu, orientētu ar cilpām) grafu ar n virsotnēm? Cik ir dažādu katra tipa grafu ar n virsotnēm un m šķautnēm?

1.4 Pierādīt, ka

(a) neeksistē (neorientēts) grafs ar piecām virsotnēm, kuru pakāpes ir $2, 4, 4, 4, 4$;

(b) eksistē (neorientēts) grafs ar piecām virsotnēm, kuru pakāpes ir $3, 3, 4, 4, 4$.

1.5 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 6 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur trijstūri.

1.6 Kādā valstī ir 2010 pilsētas. No galvaspilsētas iziet 101 aviolīnija, no pilsētas A iziet 1 aviolīnija, bet no jebkuras citas - 202 aviolīnijas. Pierādīt, ka no galvaspilsētas var aizlidot uz pilsētu A.

1.7 Jāņa klasē ir 30 skolēni (ieskaitot Jāni).

(a) Pierādiet, ka ir Jāņa klasē ir divi skolēni ar vienādu draugu skaitu šajā klasē.

(b) Ir zināms, ka Jāņa klasesbiedriem ir dažāds draugu skaits šajā klasē (nav divu skolēnu, kuriem ir vienāds draugu skaits). Cik draugu klasē ir Jānim?

1.8 Kādā valstī ir 15 pilsētas. Valstī ir 92 ceļi, katrs ceļš savieno divas pilsētas. Pierādīt, ka no jebkuras pilsētas var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu (iespējams, izmantojot vairākus ceļus).

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1.9 Pierādīt, ka eksistē grafs ar $2n$ virsotnēm, kuru pakāpes ir

$$1, 1, 2, 2, ..., n, n.$$

1.10 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 18 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur K_4.