DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis - apgūt atlikumu klašu un to gredzenu vispārinājumus - ideālus un faktorgredzenus patvaļīgos gredzenos.

1. Ideāli un faktorgredzeni

1.1. Ideāli

1.1.1. Motivācijas

Ir lietderīgi pētīt gredzena apakškopas, kas ir invariantas attiecībā uz reizināšanu ar gredzena elementiem.

Katra šāda apakškopa definē gredzena sadalījumu, pēc analoģijas ar salīdzināmību mod p vai mod $m(X)$.

Par gredzenu homomorfizma $f : R_1 \to R_2$ kodolu $Ker(f)$ sauc $f^{-1}(0_{R_2})$. Citiem vārdiem sakot,

$$Ker(f) = \{x \in R_1 | f(x) = 0_{R_2}\}.$$

$Ker(f)$ ir R_1 apakšgredzens, jo ja $f(x_1) = f(x_2) = 0$, tad

$$f(x_1 + x_2) = 0 + 0 = 0$$

un

$$f(x_1 x_2) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Vēl viena kodola īpašība: ja $x \in Ker(f)$ un $a \in R_1$, tad $ax \in Ker(f)$:

$$f(x) = f(a)f(x) = f(a) \cdot 0 = 0.$$

Citiem vārdiem sakot

$$aKer(f) \subseteq Ker(f).$$

1.1.2. Definīcijas

Dots gredzens R un tā apakškopa J. Definēsim

$$aJ = \{r \in R | r = ax, \text{ kur } x \in J\}$$

un

$$Ja = \{r \in R | r = xa, \text{ kur } x \in J\}.$$

Ja $A, B \subseteq R$, tad definēsim

$$AB = \{r \in R | r = ab, \text{ kur } a \in A, b \in B\}.$$

Kopu $I \subseteq R$ sauksim par *kreiso (labo) ideālu*, ja

1. I ir apakšgrupa attiecībā uz $+$,
2. $RI \subseteq I$ ($IR \subseteq R$) vai, citiem vārdiem sakot, katram $r \in R$ izpildās $rI \subseteq I$ ($Ir \subseteq I$) (I ir slēgta attiecībā uz reizināšanu ar R elementiem).

Kopu I sauksim par *ideālu* vai *abpusēju ideālu*, ja tas ir gan kreisais, gan labais ideāls.

1.1. piezīme. Kreisie un labi ideāli var būt atšķirīgi tikai nekomutatīvos gredzenos, piemēram, matricu gredzenos.

Ja gredzens ir komutatīvs, tad lai kopa būtu ideāls, pietiek, lai tā būtu kreisais vai labais ideāls.

1.1. teorēma. Ja ideāls satur multiplikatīvi invertējamu elementu, tad tas ir vienāds ar visu gredzenu.

PIERĀDĪJUMS Ir dots gredzens R un ideals I. Pieņemsim, ka $u \in U(R)$ un $u \in I$. Tā ka I ir ideāls, tad

$$u^{-1} \cdot u = 1 \in I.$$

Katram $r \in R$ izpildās

$$r \cdot 1 = r \in RI,$$

tātad $R \subseteq I$. Bet $I \subseteq R$, tāpēc $R = I$. ■

1.1. piemērs. Katrā gredzenā R ir divi izdalīti gredzeni - $\{0\}$ un R. Tos sauc par triviālajiem vai neīstajiem ideāliem.

Ja k ir lauks, tad katrs ideāls ir vai nu $\{0\}$ vai k.

Gredzenā $\mathbb{Z}$ kopa $m\mathbb{Z}$ ir ideāls katram m.

Gredzenā $R[X]$ kopa $mR[X]$ ir ideāls katram $m \in R[X]$.

Ja $R = Fun(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tad kopa $I_a = \{f \in R | f(a) = 0\}$ ir ideāls.

Katra gredzenu homomorfizma $f : R_1 \to R_2$ kodols ir ideāls.

Ja ir doti vairāki ideāli I_α, tad par to šķēlumu sauksim kopu

$$\bigcap_\alpha I_\alpha.$$

Ja ir dots galīgs skaits ideālu $I_1, ..., I_n$, tad par to summu sauksim kopu

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \{r \in R | r = \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ kur } x_i \in I_i\}.$$

Ja ir dots galīgs skaits ideālu $I_1, ..., I_n$, tad par to reizinājumu sauksim kopu

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = \{r \in R | r = \sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{ij}, \text{ kur } x_{ij} \in I_i\}.$$

1.2. teorēma. Ideālu šķēlums, summa un reizinājums ir ideāls.

PIERĀDĪJUMS

Šķēlums. Ja $x \in I_\alpha$ katram α, tad katram $r \in R$ izpildās $rx \in I_\alpha$, tātad

$$rx \in \bigcap_\alpha I_\alpha.$$

Summa. Ja $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$, kur $x_i \in I_i$, tad katram $r \in R$ izpildās

$$rx = rx_1 + rx_2 + ... + rx_n \in \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Reizinājums. Ja $x = \sum_{j=1}^{m} x_{1j} x_{2j} ... x_{nj}$, kur $x_i \in I_i$, tad katram $r \in R$ izpildās

$$rx = \sum_{j=1}^{m} (rx_{1j}) x_{2j} ... x_{nj} \in \prod_{i=1}^{n} I_i.$$

■

Patvaļīgam gredzenam R kopa aR ir ideāls katram $a \in R$, apzīmē ar (a). Tādus ideālus sauc par *galvenajiem ideāliem* .

Ja gredzenā R katrs ideāls ir galvenais, tad R sauc par *galveno ideālu gredzenu (GIG)*.

Patvaļīgam gredzenam R un fiksētiem elementiem $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ kopa

$$\{r \in R | r = a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n, \text{ kur } x_i \in R\}$$

ir ideāls katram $a \in R$, apzīmē ar $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Tādus ideālus sauc par *galīgi ǧenerētiem ideāliem*, elementus $a_1, ..., a_n$ sauc par ideāla *ǧeneratoriem.*

1.2. piemērs. Ideāls $(2, X) \in \mathbb{Z}[X]$ nav galvenais, to nevar izteikt formā (a). Tā kā $2 \in (2, X)$, tad $a = \pm 2$, bet tad $X \notin (2, X)$.

1.3. teorēma.

1. $\mathbb{Z}$ ir GIG.
2. Katram laukam k polinomu gredzens $k[X]$ ir GIG.

PIERĀDĪJUMS

1. Dots ideāls $I \subseteq \mathbb{Z}$. Apskatīsim mazāko naturālo skaitli $x \in I$. Ir skaidrs, ka $x\mathbb{Z} \subseteq I$. Ja $a \in I$ un $a = qx + r$, tad $r = 0$, jo $r = a - qx \in I$, bet $0 \leq r < x$. Seko, ka $a = qx$ un $x\mathbb{Z} = I$.

2. Dots ideāls $I \subseteq k[X]$. Apskatīsim $m \in I$ ar mazāko pakāpi. Ja $f \in I$, tad $f = qm + r$, kur $\deg(r) < \deg(m)$. Tā kā $r = f - qm \in I$, tad $r = 0$. Seko, ka $f = qm$, tātad $I \subseteq mR[X]$. Tā kā $mR[X] \subseteq I$, tad $mR[X] = I$.

■

1.2. Faktorgredzeni

1.2.1. Definīcijas

Ja $I \subseteq R$ ir ideāls, tad teiksim, ka divi elementi r_1 un r_2 ir salīdzināmi pēc moduļa I, ja

$$r_1 - r_2 \in I.$$

Apzīmēsim to ar $r_1 \sim r_2$.

Salīdzināmība mod I ir ekvivalences attiecība gredzenā R.

Ekvivalences klases apzīmēsim veidā $a + I$ (vai $[a]$). Ekvivalences klašu kopu apzīmēsim ar R/I.

1.2. piezīme. Ja $a \sim b$, tad $a + I = b + I$.

Ir definēta dabiskā projekcija

$$\pi : R \to R/I,$$
$$\pi(a) = a + I.$$

Operācijas ar ekvivalences klasēm:

- Saskaitīšana - $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$.
- Reizināšana - $(a+I)(b+I)=ab+I$.

1.4. teorēma.

1. Ekvivalences klašu operācijas ir definētas korekti - nav atkarīgas no pārstāvju izvēles.
2. Ekvivalences klašu kopa R/I ar definētajām operācijām ir komutatīvs gredzens.
3. π ir gredzenu homomorfizms, $Ker(\pi) = I$.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja $a_1 + I = a_2 + I$ un $b_1 + I = b_2 + I$, tad $a_1 = a_2 + u$ un $a_1 = a_2 + v$, kur $u, v \in I$. Tad

$$(a_1 + I) + (b_1 + I) = (a_1 + b_1) + I = \\ (a_2 + b_2) + (u + v + I) = (a_2 + b_2) + I,$$

$$(a_1 + I)(b_1 + I) = a_1 b_1 + I = (a_2 + u)(b_2 + v) + I = \\ a_2 b_2 + (ub_2 + va_2 + uv + I) = a_2 b_2 + I.$$

2. Aksiomu pārbaude. $0 = 0 + I$, $1 = 1 + I$, $-(a + I) = -a + I$.

3. Ja $a \in I$, tad $\pi(a) = I = 0 + I$, tāpēc $I \subseteq Ker(\pi)$. Ja $\pi(b) = 0 + I$, tad $b \sim 0$, tātad $b \in I$. Seko, ka $Ker(\pi) \subseteq I$ un $Ker(\pi) = I$.

■

Ekvivalences klašu gredzenu mod I apzīmē ar R/I.

1.3. piemērs. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $R[X]/(m)$.

2. 8.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Vai visu multiplikatīvi neinvertējamo elementu kopa ir ideāls gredzenos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$?

8.2 Atrast visus ideālus gredzenā $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Noteikt, kuri no tiem ir galvenie.

8.3 Izvēlēties divus netriviālus ideālus no iepriekšējā uzdevuma atrisinājuma un atrast atbilstošo faktorgredzenu operāciju tabulas.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.4 Dots, ka R ir integrāls gredzens ar vieninieku. Pierādīt, ka $R[X]$ ir GIG tad un tikai tad, ja R ir lauks.