DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Faktorizācijas algoritmi **3**

1.1. Kronekera factorizācijas algoritms 3

1.1.1. Ievads 3

1.1.2. Algoritms 5

2. Integrāla gredzena daļu lauks un tā pielietojumi polinomu algebrā **9**

2.1. Pamatdefinīcijas 9

2.2. Racionālo funkciju lauks 14

2.2.1. Pamatfakti 14

2.2.2. Racionālas funkcijas sadalīšana elementārdaļās 17

2.3. Daļu lauku pielietojumi polinomu faktorizācijā 27

3. 6.mājasdarbs **31**

3.1. Obligātie uzdevumi 31

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 32

Lekcijas mērķis - apgūt faktorizēšanas algoritmus un kritērijus.

1. Faktorizācijas algoritmi

1.1. Kronekera factorizācijas algoritms

1.1.1. Ievads

Kronekera algoritms ir algoritms, ar kura palīdzību var sadalīt reizinātājos polinomus gredzenā $\mathbb{Q}[X]$, un tātad arī gredzenā $\mathbb{Z}[X]$. Tas ir relatīvi vienkāršs (*rupja spēka* vai *izsmeļošās pārlases* tipa) algoritms.

Atzīmēsim šādus faktus:

- ja polinoms ar pakāpi n ir dalāms, tad tam eksistē dalītājs, kura pakāpe nepārsniedz $[\frac{n}{2}]$,
- polinoms ar pakāpi l ir viennozīmīgi noteikts ar savām vērtībām $l+1$ punktos,

- ja $f = gh$, tad $g(c)|f(c)$ visiem a,
- ja ir zināmas polinoma ar pakāpi l vērtības $l+1$ punktos, tad šādu polinomu var atrast ar, piemēram, Lagranža polinoma interpolācijas formulas palīdzību.

Kronekera algoritma īss apraksts - lai sadalītu reizinātājos polinomu f ar pakāpi n veicam šādas darbības:

- izvēlamies $[\frac{n}{2}]$ veselus punktus,
- atrodam šajos punktos f vērtības,
- atrodam visas iespējamās veselo skaitļu virknes, kuru elementi dala f vērtības izvēlētajos punktos,
- katrai šādai virknei konstruējam atbilstošo interpolējošo polinomu un pārbaudām, vai tas ir f dalītājs.

1.1.2. Algoritms

Ir dots polinoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ ar pakāpi n. Apzīmēsim $[\frac{n}{2}]$ ar l.

1. Izvēlēsimies $l+1$ veselu punktu virkni $\mathcal{C} = (c_0, ..., c_l)$, piemēram, $(0, 1, ..., l)$ vai $(0, 1, -1, 2, -2, ...)$.
2. Ja kādam i izpildās $f(c_i) = 0$, tad izdalām f ar $X - c_i$ un atgriežamies uz soli 1 ar polinomu $\frac{f}{X-c_i}$.
3. Atradīsim virkni $f(\mathcal{C}) = (f(c_0), ..., f(c_l))$.
4. Pēctecīgi apskatīsim visas virknes $\mathcal{D} = (d_0, ..., d_l)$, kur $d_i | f(c_i)$:
   (a) ar Lagranža interpolācijas formulas palīdzību konstruēsim polinomu $f_{\mathcal{D}}$, kuram izpildās nosacījums
   $$f_{\mathcal{D}}(c_i) = d_i$$
   katram $0 \geq i \geq l$,
   (b) ja $f_{\mathcal{D}} \in \mathbb{Z}[X]$, $deg(f) > 0$ un $f_{\mathcal{D}} | f$, tad $f_{\mathcal{D}}$ ir f dalītājs, varam atkārtoti pielietot Kronekera algoritmu polinomiem $f_{\mathcal{D}}$ un $\frac{f}{f_{\mathcal{D}}}$,

(c) ja $f_{\mathcal{D}} \notin \mathbb{Z}[X]$ vai $f_{\mathcal{D}} \nmid f$ (citiem vārdiem sakot, $\frac{f}{f_{\mathcal{D}}} \notin \mathbb{Z}[X]$), tad pārejam uz nākamo virkni $\mathcal{D}$.

5. Ja pēc visu virkņu $\mathcal{D}$ apskatīšanas nav atrasts neviens f dalītājs, tad f ir nedalāms.

1.1. piemērs. Sadalīsim reizinātājos virs $\mathbb{Z}$ polinomu

$$f = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 2X - 1.$$

Tam eksistē dalītājs, kura pakāpe nepārsniedz 2.

Izvēlēsimies 3 punktu virkni $\mathcal{C} = (0, 1, 2)$.

Atradīsim $f(\mathcal{C}) = (-1, 1, -1)$.

Mums ir jāapskata 8 virknes, jo katram virknes $f(\mathcal{C})$ elementam ir 2 veseli dalītāji.

1. $\mathcal{D} = (1, 1, 1)$,

$$f_{\mathcal{D}} = 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 1 \cdot \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 1 \cdot \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = 1.$$

Šajā gadījumā polinoms ir konstants.

2. $\mathcal{D} = (1, 1, -1)$,

$$f_{\mathcal{D}} = 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} +$$

$$1 \cdot \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + (-1) \cdot \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = -X^2 + X + 1.$$

Izdalot f ar $f_{\mathcal{D}}$, iegūsim $-X^2 + 3X - 1$. Pārbaudot kvadrātvienādojumu saknes, redzam, ka $-X^2 + X + 1$ un $-X^2 + 3X - 1$ ir nedalāmi virs $\mathbb{Z}$, tāpēc uzdevums ir atrisināts un

$$f = (X^2 - X - 1)(X^2 - 3X + 1).$$

Apskatīsim arī pārējos gadījumus.

3. $\mathcal{D} = (1, -1, 1)$,

$$f_{\mathcal{D}} = 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} +$$

$$(-1) \cdot \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 1 \cdot \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = 2X^2 - 4X + 1.$$

Šajā gadījumā $f_{\mathcal{D}} \nmid f$.

4. $\mathcal{D} = (1, -1, -1)$,

$$f_{\mathcal{D}} = 1 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} +$$

$$(-1) \cdot \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + (-1) \cdot \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = X^2 - 3X + 1.$$

Šajā gadījumā rezultāts ir tāds pats kā 2.gadījumā.

5. Pārējie gadījumu atšķiras no iepriekšējiem ar zīmi, tos apskatīt nav nepieciešams.

2. Integrāla gredzena daļu lauks un tā pielietojumi polinomu algebrā

2.1. Pamatdefinīcijas

2.1. piemērs. Racionālo skaitļu gredzenu $\mathbb{Q}$ var konstruēt kā veselo skaitļu pāru $\frac{m}{n}$ kopu.

Ir dots integrāls gredzens R. Apskatīsim kopu $R \times R^*$, kur $R^* = R \backslash \{0\}$.

Kopā $R \times R^*$ definēsim šādu attiecību:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

2.1. teorēma. Attiecība $\sim$ ir ekvivalence.

PIERĀDĪJUMS Refleksivitāte. $(a, b) \sim (a, b)$, jo $ab = ab$.

Simetrija. Ja $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$, tad $a_1 b_2 = a_2 b_1$ un tātad $(a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$.

Tranzitivitāte. Ja $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ un $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$, tad

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$
$$a_2 b_3 = a_3 b_2.$$

Reizinot pirmo vienādību ar b_3, iegūsim

$$a_1 b_2 b_3 = a_2 b_1 b_3 = a_3 b_2 b_1.$$

Saīsinot abas puses ar b_2, iegūsim, ka $a_1 b_3 = a_3 b_1$, tātad $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$. ■

Tā kā attiecība $\sim$ ir ekvivalence, tad tā definē kopas $R \times R^*$ sadalījumu atbilstošajās ekvivalences klasēs. Atbilstošo faktorkopu (ekvivalences klašu kopu) apzīmēsim ar $Q(R)$. Pāra (a, b) pārstāvēto klasi apzīmēsim ar $[a, b]$.

Kopā $Q(R)$ definēsim divas operācijas:

- saskaitīšanu: $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2]$,
- reizināšanu: $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 a_2, b_1 b_2]$.

2.2. teorēma.

1. Katram integrālam gredzenam R $(Q(R), +, \cdot)$ ir lauks.
2. Funkcija $\iota : R \to Q(R)$, kas ir definēta veidā $\iota(a) = [a, 1]$ ir injektīvs gredzenu homomorfizms.

PIERĀDĪJUMS 1. Jāpārbauda, ka operācijas nav atkarīgas no pārstāvju izvēles. Jāpārbauda visas lauka aksiomas.

2. Ja $\iota(a_1) = \iota(a_2)$, tad $a_1 = a_2$, tātad funkcija ir injektīva. Īpašības

$$\iota(a_1 + a_2) = \iota(a_1) + \iota(a_2),$$
$$\iota(a_1 a_2) = \iota(a_1)\iota(a_2)$$

seko no operāciju definīcijām. ■

2.1. piezīme. Iepriekšējās teorēmas otrais punkts nozīmē to, ka R var interpretēt kā $Q(R)$ apakšgredzenu. Šī iemesla dēļ $Q(R)$ sauc par *R daļu lauku (field of fractions)*.

2.2. piezīme. Tā kā R ir apakšgredzens laukā $Q(R)$, tad var identificēt $Q(R)$ elementus formā $[x, 1]$ ar x un definēt R un $Q(R)$ operācijas izejot no definīcijām:

$$x + [y, z] = [x, 1] + [y, z] = [xz + y, z],$$
$$x \cdot [y, z] = [x, 1] \cdot [y, z] = [xy, z].$$

Šī pieeja ir ērtāka, it sevišķi, ja izmanto apzīmējumu $[x, y] = \frac{x}{y}$.

2.2. piemērs. $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$.

Ja k ir lauks, tad $Q(k) \simeq k$. Gredzenu izomorfizmu $\varphi : k \to Q(k)$ var izvēlēties formā

$$\varphi(a) = (a, 1).$$

2.2. Racionālo funkciju lauks

2.2.1. Pamatfakti

Šajā sadaļā strādāsim ar polinomiem virs laukiem.

Ja k ir lauks, tad $Q(k[X])$ sauksim par *racionālo funkciju lauku virs* k un apzīmēsim ar $k(X)$.

$k(X)$ elementus var pierakstīt formā $[f, g]$ vai, labāk, $\frac{f}{g}$ vai f/g. Šādos apzīmējumos f sauc par skaitītāju un g - par saucēju.

Redzam, ka

$$\frac{f}{g} = \frac{fh}{gh},$$

kur $h \neq 0$. Ja $f = f_1 w$ un $g = g_1 w$, tad

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}.$$

Redzam, ka racionālajai funkcijai f/g lielums

$$\deg(f) - \deg(g) = \deg(fh) - \deg(gh) = \deg(f_1) - \deg(g_1)$$

ir lielums, kas nav atkarīgs no tās pieraksta. To sauc par *racionālās daļas f/g pakāpi* un apzīmē ar $\deg(f/g)$.

Ievērosim, ka polinoma kā racionālas funkcijas pakāpe sakrīt ar polinoma pakāpi:

$$\deg(f) = \deg(f/1) = \deg(f) - \deg(1) = \deg(f) - 0 = \deg(f).$$

Racionālu funkciju f/g sauksim par *nesaīsināmu*, ja

$$LKD(f, g) = 1.$$

2.3. teorēma. Racionālās funkcijas nesaīsināmais pieraksts ir noteikts viennozīmīgi ar precizitāti līdz reizinātājiem no k skaitītājā un saucējā.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $f/g = f_1/g_1$, kur

$$LKD(f, g) = LKD(f_1, g_1) = 1.$$

Tā kā

$$fg_1 = f_1g,$$

tad $f|f_1$, $f_1|f$, $g|g_1$ un $g_1|g$. Redzam, ka $f \sim f_1$ un $g \sim g_1$ (šeit $\sim$ nozīmē asociāciju).

■

Parasti tiek strādāts ar racionālu funkciju nesaīsināmajām formām.

2.2.2. Racionālas funkcijas sadalīšana elementārdaļās

Racionālu funkciju f/g sauksim par *īstu*, ja

$$\deg(f/g) = \deg(f) - \deg(g) < 0.$$

2.4. teorēma. Jebkuru racionālu funkciju $f/g \in k(X)$ var viennozīmīgi izteikt polinoma un īstas racionālas funkcijas summas veidā.

PIERĀDĪJUMS
Eksistence. Izdalīsim f ar g:

$$f = qg + r, \text{ kur } \deg(r) < \deg(g).$$

Redzam, ka

$$\frac{f}{g} = \frac{qg + r}{g} = q + \frac{r}{g},$$

kur $\deg(r/g) = \deg(r) - \deg(g) < 0$.

Vienīgums.

Pieņemsim, ka

$$\frac{f}{g} = q_1 + \frac{r_1}{g_1} = q_2 + \frac{r_2}{g_2},$$

kur $q_1, q_2 \in k[X]$, $\deg(r_1/g_1) < 0$, $\deg(r_2/g_2) < 0$. Redzam, ka

$$q_1 - q_2 = \frac{r_2}{g_2} - \frac{r_1}{g_1} = \frac{r_2 g_1 - r_1 g_2}{g_1 g_2}$$

Redzam, ka

$$\deg(\frac{r_2 g_1 - r_1 g_2}{g_1 g_2}) = \deg(r_2 g_1 - r_1 g_2) - \deg(g_1 g_2) < 0.$$

Tātad $q_1 - q_2 = 0$, $r_2 g_1 - r_1 g_2 = 0$ un $r_1/g_2 = r_2/g_2$. ■

2.3. piemērs.

2.3. piezīme. Īstas racionalas funkcijas veido apakšgredzenu bez vieninieka visu racionālu funkciju gredzenā.

Īstu racionālu funkciju f/g sauksim par *elementārdaļu*, ja $g = p^n$, kur p ir nedalāms polinoms gredzenā $k[X]$ un $\deg(f) < \deg(p)$.

2.4. piemērs. Elementārdaļas laukā $\mathbb{C}(X)$ - $\frac{c}{(X-a)^n}$.

Elementārdaļas laukā $\mathbb{R}(X)$ - $\frac{c}{(X-a)^n}$, $\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^m}$, kur X^2+pX+q ir nedalāms virs $\mathbb{R}$.

2.5. teorēma. Jebkuru īstu racionālu funkciju var viennozīmīgi izteikt elementārdaļu summas veidā.

PIERĀDĪJUMS Ir dota īsta racionāla funkcijas $f/g \in k(X)$. Uzskatīsim, ka g ir normalizēts polinoms (vecākais koeficients ir 1), jo pretējā gadījumā var iznest vienādus reizinātājus no saucēja un skaitītāja un saīsināt.

1.solis. Divi reizinātāji saucējā ar $LKD = 1$.
Pierādīsim, ka ja $LKD(g_1, g_2) = 1$, tad

$$\frac{f}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2},$$

kur f_1/g_1, f_2/g_2 ir īstas racionālas funkcijas un f_1, f_2 ir noteikti viennozīmīgi.

No tā, ka $LKD(g_1, g_2) = 1$ seko, ka eksistē polinomu $v_1, v_2 \in k[X]$ tādi, ka

$$1 = v_1 g_1 + v_2 g_2.$$

Seko, ka

$$f = fv_1g_1 + fv_2g_2.$$

Izdalīsim fv_1 ar g_2 un fv_2 ar g_1:

$$fv_1 = q_2g_2 + f_2,$$
$$fv_2 = q_1g_1 + f_1,$$

kur $\deg(f_i) < \deg(g_i)$.

Redzam, ka

$$\frac{f}{g_1g_2} = \frac{(q_2q_2 + f_2)g_1}{g_1g_2} + \frac{(q_1g_1 + f_1)g_2}{g_1g_2} =$$
$$= (\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}) + (q_1 + q_2)$$

No racionālas funkcijas viennozīmīgas izteikšanas polinoma un īstas racionālas funkcijas veidā seko, ka $q_1 + q_2 = 0$ un apgalvojums ir pierādīts.

2.solis. Vairāki reizinātāji saucējā ar $LKD = 1$.
Pierādīsim, ka ja $LKD(g_1, g_2, ..., g_m) = 1$, tad

$$\frac{f}{g_1 g_2 ... g_m} = \frac{f}{\prod_{i=1}^{m} g_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{g_i},$$

kur f_i/g_i ir īstas racionālas funkcijas un f_i ir noteikti viennozīmīgi.

Pierādīsim to izmantojot matemātisko indukciju ar argumentu m.

Indukcijas bāze.
Ja $m = 1$, tad nekas nav jāpierāda.
Indukcijas solis.
Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visiem $m < n$ un pierādīsim, ka tad tas ir spēkā, ja $m = n$.

Redzam, ka

$$\frac{f}{g_1 g_2 \ldots g_{n-1} g_n} = \underbrace{\frac{\tilde{f}}{g_1 \ldots g_{n-1}} + \frac{f_n}{g_n}}_{\text{no 2.soļa}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{f_1}{g_1} + \ldots + \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}\right)}_{\text{no indukcijas pieņēmuma}} + \frac{f_n}{g_n}.$$

Visas racionālās funkcijas ir īstas un polinomi f_i ir noteikti viennozīmīgi.

Šī apgalvojuma speciālgadījums ir šāds: ja p_i ir dažādi nedalāmi polinomi, tad

$$\frac{f}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{p_i^{\alpha_i}},$$

kur $f_i/p_i^{\alpha_i}$ ir īstas racionālas funkcijas un f_i ir noteikti viennozīmīgi.

3.solis. Nedalāma polinoma pakāpe saucējā.

Pierādīsim, ka ja p ir nedalāms polinoms, tad īstu racionālu funkciju f/p^α var viennozīmīgi izteikt elementārdaļu summas veidā.

Atcerēsimies naturālo skaitļu m-āro pierakstu un izteiksim f kā p pakāpju lineāru kombināciju - izteiksim f p-ārajā pierakstā:

$$\begin{aligned}
&f = q_0 p + r_0 = \\
&= (q_1 p + r_1)p + r_0 = q_1 p^2 + r_1 p + r_0 = \\
&= (q_2 p + r_2)p^2 + r_1 p + r_0 = \\
&= ... = \\
&= (0 \cdot p + r_{\alpha-1})p^{\alpha-1} + r_{\alpha-2}p^{\alpha-2} + ... + r_0 = \\
&= r_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + r_{\alpha-2}p^{\alpha-2} + ... + r_0.
\end{aligned}$$

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}
&\deg(q_0) = \deg(f) - \deg(p),\\
&\deg(q_1) = \deg(f) - 2\deg(p),\\
&\dots\\
&\deg(q_{\alpha-2}) = \deg(f) - (\alpha-1)\deg(p),\\
&\deg(q_{\alpha-1}) = \deg(f) - \alpha\deg(p) < 0.
\end{aligned}$$

Polinomi r_i ir noteikti viennozīmīgi un $\deg(r_i) < \deg(p)$.

Redzam, ka

$$\frac{f}{p^\alpha} = \frac{r_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + r_{\alpha-2}p^{\alpha-2} + \dots + r_0}{p_\alpha} =$$
$$= \frac{r_{\alpha-1}}{p} + \frac{r_{\alpha-2}}{p^2} + \dots + \frac{r_0}{p^\alpha}.$$

Esam ieguvuši, ka f/p^α ir viennozīmīgi izsakāms elementārdaļu summas veidā.

4.solis. Kopsavilkums.

Teorēmas apgalvojums seko no iepriekšējiem soļiem. ■

2.3. Daļu lauku pielietojumi polinomu faktorizācijā

2.6. teorēma. Dots, ka R ir VFG. Ja polinomi $f, g \in R[X]$ ir asociēti gredzenā $Q(R)[X]$, tad tie ir asociēti gredzenā $R[X]$.

PIERĀDĪJUMS Ja $f \sim g$ gredzenā $Q(R)[X]$, tad

$$f = \frac{\alpha}{\beta} g,$$

kur $\alpha, \beta \in R$. Redzam, ka tad

$$\beta f = \alpha g.$$

No R viennozīmīgās faktorizācijas seko, ka $\alpha \sim \beta$ gredzenā R, tātad

$$\alpha = u\beta,$$

kur $u \in U(R)$. Seko,ka

$$f = \frac{\alpha}{\beta} g = ug,$$

tātad $f \sim g$ gredzenā $R[X]$. ■

2.7. teorēma. Dots, ka R ir VFG. Ja nekonstants polinoms $f \in R[X]$ ir nedalāms gredzenā $R[X]$, tad tas ir nedalāms gredzenā $Q(R)[X]$.

PIERĀDĪJUMS Šis fakts jau tika pierādīts gadījumā, kad $R = \mathbb{Z}$. Vispārīgā gadījumā pierādījums ir tāds pats. ■

2.8. teorēma. Ja R ir VFG, tad $R[X]$ arī ir VFG.

PIERĀDĪJUMS
1.solis. Sadalījuma eksistence.
Jebkuru polinomu $f \in R[X]$ var uzrakstīt formā

$$f = cont(f) f_0,$$

kur f_0 ir primitīvs polinoms.

$cont(f)$ var viennozīmīgi sadalīt nedalāmos reizinātājos virs R.

Ar matemātiskās indukcijas metodi ar parametru $\deg(f_0)$ pierādīsim, ka f_0 var sadalīt nedalāmos reizinātājos virs R.

Indukcijas bāze. Ja $\deg(f_0) = 1$, tad f_0 ir nedalāms un noteikts viennozīmīgi ar precizitāti līdz invertējamam reizinātājam.

Indukcijas solis. Pieņemsim, ka jebkuru primitīvu polinomu f_0, kuram $\deg(f_0) < n$, var sadalīt nedalāmos reizinātājos.

Apskatīsim polinomu f_0, kuram $\deg(f_0) = n$. Ja f_0 ir dalāms, tad tā reizinātāju pakāpes ir mazākas nekā n, tāpēc saskaņā ar indukcijas pieņēmumu f_0 ir izsakāms kā nedalāmu reizinātāju reizinājums.

2.solis. Sadalījuma vienīgums.

Pietiek pierādīt vienīgumu primitīviem polinomiem, jo $cont(f)$ ir sadalāms viennozīmīgi.

Pieņemsim, ka f_0 var izteikt nedalāmu polinomu reizinājumā divos dažādos veidos:

$$f_0 = f_1 ... f_m = g_1 ... g_l.$$

Visi polinomi f_i, g_j ir nedalāmi virs $Q(R)[X]$ saskaņā ar iepriekšējo teorēmu.

Agrāk bija pierādīts, ka $k[X]$ ir VFG, ka k ir lauks. Tā kā $Q(R)[X]$ ir lauks, tad polinomam f_0 kā $Q(R)[X]$ izpildās viennozīmīgās faktorizācijas nosacījums:

- $m = l$,
- polinomiem var mainīt indeksāciju tā, ka $f_i \sim g_i$ virs $Q(R)[X]$.

No iepriekš dotas teorēmas seko, ka $f_i \sim g_i$ virs $R[X]$. Tātad sadalījums ir noteikts viennozīmīgi virs R.

■

2.5. piemērs. Tagad ir pierādīts, ka $\mathbb{Z}[X]$ ir faktoriāls gredzens.

3. 6.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Sadalīt polinomus nedalāmajos reizinātājos virs $\mathbb{Z}$:

(a) $2X^4 - 13X^3 + 25X^2 - 14X + 2$,

(b) $X^6 - 9X^5 + 29X^4 - 39X^3 + 17X^2 + 3X - 1$.

6.2. Izteikt dotās racionālās funkcijas elementārdaļu summu veidā:

(a) $\frac{X}{X(X-1)(X-2)}$ virs $\mathbb{Q}$,

(b) $\frac{X^2}{X^3-1}$ virs $\mathbb{Q}$,

(c) $\frac{X^2}{X^3-1}$ virs $\mathbb{C}$,

(d) $\frac{X}{X^2-1}$ virs $\mathbb{F}_3$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.3 Dots, ka

$$f = \prod_{i=1}^{m} (X - a_i),$$

kur $a_i \in k$. Pierādīt, ka

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{X - a_i}.$$