DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis - apgūt pamatfaktus par polinomu faktorizāciju virs $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$.

1. Pamatfakti par $\mathbb{C}$

1.1. Motivācijas

1.1.1. Algebra

Algebriskā motivācija - reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ nevar atrisināt pat tādu vienkāršu algebrisku vienādojumu kā

$$x^2 + 1 = 0,$$

tāpēc ir vēlams paplašināt gredzenu $\mathbb{R}$ līdz kādam lielākam gredzenam, kurā šādi vienādojumi būtu atrisināmi.

1.1.2. Ģeometrija

Ģeometriskā motivācija - reālo skaitļu kopa atbilst taisnes punktiem, bet taisne atrodas plaknē, tāpēc vēlams paplašināt $\mathbb{R}$ tā, lai lielākā gredzena elementi atbilstu plaknes punktiem.

Izrādās, ka abas motivācijas var apmierināt vienlaicīgi.

1.2. Paplašinājuma modeļi

1.2.1. 1.paplašinājuma modelis - antisimetriskās matricas

Apzīmēsim ar $\mathcal{C}$ reālo antisimetrisko 2×2 matricu kopu, kuras elementi ir formā

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Matricām ir definēta saskaitīšana un reizināšana.

Var pārbaudīt, ka $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ir lauks, kurā 0 ir nulles matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un 1 ir vienības matrica

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{C}$ satur apakšgredzenu $\mathcal{R}$, kura elementi ir matricas formā

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Tādējādi, var uzskatīt, ka $\mathcal{C}$ ir $\mathbb{R}$ paplašinājums.

Ievērosim, ka matrica

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

apmierina matricu vienādojumu

$$I^2 + E_2 = 0.$$

Tādējādi $\mathcal{C}$ var interpretēt kā $\mathbb{R}$ paplašinājumu, kas apmierina vienu no motivācijām.

1.2.2. 2.paplašinājuma modelis - komplekso skaitļu plakne

Definēsim divas binūras operācijas kopā

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

šādā veidā:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (vektoru saskaitīšana),
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (kaut kas jauns).

Var pārbaudīt, ka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ir lauks, kurā 0 ir elements $(0, 0)$ un 1 ir elements $(1, 0)$. Šo lauku apzīmē ar $\mathbb{C}$ un sauc par *komplekso skaitļu lauku*.

Elementi formā $(x, 0)$ veido apakšgredzenu, kas ir izomorfs ar $\mathbb{R}$. Elementu $(x, 0)$ identificēsim ar x. Tādējādi $\mathbb{C}$ var uzskatīt par $\mathbb{R}$ paplašinājumu, kas apmierina ģeometrisko motivāciju.

Var redzēt, ka elements $i = (0, 1)$ apmierina vienādojumu

$$x^2 + 1 = 0.$$

Redzam, ka

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

šo pierakstu parasti arī izmanto.

1.3. Pamatfakti

1.3.1. Aritmētiskās operācijas

Komplekso skaitļu operācijas ir definētas sādā veidā:

- $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_1) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$,
- $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,
- $$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ja $z = x + iy$, tad $x = \mathcal{R}e(z)$, $y = \mathcal{I}m(z)$, $\bar{z} = x - iy$ (*kompleksi saistītais skaitlis*). Redzam, ka $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$. Redzam, ka $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Komplekso skaitļu kopā nav dabiska reālo skaitļu salīdzināšanas $\leq$ analoga.

1.3.2. Polārie parametri un trigonometriskā forma

Par $z = x + iy$ *moduli* sauc lielumu $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, par *argumentu* $\arg(z)$ sauc saistītās polārās sistēmas koordināti φ, kas apmierina sakarības

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Redzam, ka $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (kompleksā skaitļa *trigonometriskā forma*).

Redzam, ka $arg(z)$ ir noteikts ar precizitāti līdz 2π daudzkārtnim.

1.3.3. Īpašības

1.1. teorēma. Kompleksajiem skaitļiem izpildās šādas īpašības:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$,
4. $$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ un $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (kompleksā saistīšana ir gredzenu homomorfizms),
6. ja $f \in \mathbb{C}[X]$, tad $\overline{f(z)} = \overline{f}(\overline{z})$, kur $\overline{f}$ ir polinoms ar kompleksi saistītiem koeficientiem salīdzinājumā ar f.

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude.
■

1.1. piezīme. No teorēmas seko *Muavra formula*:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

1.2. piezīme. No teorēmas seko n-tās kārtas saknes aprēķināšanas formula. Ja

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

un $w^n = z$, tad

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n \cdot \psi = \varphi. \end{cases}$$

Tādējādi

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Dažādas ψ vērtības iegūsim, ja k vietā liksim visu atlikumu klašu mod n pārstāvjus, piemēram, kopas $\{0, ..., n-1\}$ elementus.

Apkopojot iegūstam šādu rezultātu:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}))$$

1.3.4. Eksponenciālā forma

Eksponentfunkciju var vispārināt uz $\mathbb{C}$ - definēt funkciju $f(z) = e^z$ ar šādām īpašībām:

- ja $z \in \mathbb{R}$, tad funkcija sakrīt ar klasisko eksponentfunkciju,
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,
- $e^{z_1 z_2} = (e^{z_1})^{z_2}$.

Var pierādīt *Eilera formulu*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

kur $\varphi \in \mathbb{R}$.

Kompleksos skaitļus var uzdot *eksponenciālajā formā*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

.

2. 4.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Attēlojiet kompleksajā plaknē apgabalu, kas apmierina nosacījumu

$$|z - i| < 1.$$

4.2 Atrisiniet kompleksajos skaitļos vienādojumu

$$z^4 + 4 = 0.$$

4.3 Sadaliet nedalāmajos reizinātājos polinomu $X^8 - 1$ virs $\mathbb{C}$ un virs $\mathbb{R}$.

4.4 Izmantojot Kardano formulas atrisiniet kompleksos skaitļos vienādojumu

$$X^3 + 12X^2 + 45X + 50 = 0.$$

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.5 Atrodiet $LKD(X^m + 1, X^n + 1)$ virs $\mathbb{C}$, kur $m, n \in \mathbb{N}$.

4.6 Pierādiet pilnā apjomā algebras pamatteorēmu - $\mathbb{C}$ ir algebriski slēgts lauks.