DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

12.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Simetriskie polinomi

Šajā sadaļā apskatīsim polinomus virs lauka k.

1.1. Definīcijas

1.1.1. Permutācijas

Ja ir dota galīga kopa A, tad par tās *permutāciju* sauc jebkuru bijektīvu funkciju

$$\sigma : A \to A.$$

Visu n elementu kopas permutāciju kopu apzīmē ar Σ_n.

Var atrast visu permutāciju skaitu kopā ar n elementiem:

$$|\Sigma_n| = n(n-1)(n-2)...2 \circ 1 = n!.$$

Katrā kopā A eksistē tikai viena universāli definēta permutācija - *vienības permutācija* id.

Permutāciju pierakstam var izmantot šādus veidus:

- attēlu saraksts;
- vertikālais pieraksts;
- horizontālais pieraksts - šajā gadījumā funkciju pieraksta divu rindu veidā, kas ir savienotas ar iekavām, augšējā rindā raksta kopas elementus kaut kādā noteiktā kārtībā, apakšējā rindā raksta kopas elementu attēlus attiecībā uz doto funkciju tā, ka katrā kolonnā apakšējais elements ir augšējā elementa attēls;
- diagrammas veidā.

Kopā Σ_n var definēt *kompozīcijas* operāciju. Ja ir dotas divas permutācijas σ_1 un σ_2, tad to kompozīcija $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ir definēta ar nosacījumu

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)), \forall x.$$

Katrai permutācijai σ eksistē *inversā permutācija* σ^{-1}, kas ir definēta ar nosacījumu

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}\,.$$

Permutāciju $f : A \to A$ sauksim par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un kopas A elementus var sanumurēt noteiktā kārtībā $a_0, ..., a_{n-1}$ tā, ka $f(a_i) = a_{i+1 \text{ mod n}}$, šādu permutāciju apzīmēsim veidā $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$;
- vai arī $|A| = 1$ (un kopas A vienīgais elements a apmierina vienādību $f(a) = a$).

1.1. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) Katrai galīgas kopas A permutācijai σ eksistē A sadalījums apakškopās $A_1, ..., A_m$ tāds, ka σ sašaurinājums uz katru apakškopu A_i ir cikls.

Var definēt permutācijas *ciklisko pierakstu*:

1.1. piemērs. Permutāciju

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

var sadalīt divos ciklos un apzīmēt veidā

$$(15)(243).$$

1.2. teorēma. Kopa Σ_n ar permutāciju kompozīcijas operāciju veido (nekomutatīvu) grupu.

PIERĀDĪJUMS Funkciju kompozīcija ir asociatīva. Eksistē vienības elements - vienības permutācija. Katrai permutācijai eksistē inversais elements - inversā permutācija.

■

1.2. piemērs. Operāciju tabulas grupām Σ_2 un Σ_3.

1.1.2. Permutāciju grupas darbība polinomu gredzenā

Katrai n elementu kopas permutācijai σ un katram polinomam $f \in R[X_1, ..., X_n]$ definēsim polinomu $\sigma \circ f$ ar šādu nosacījumu:

$$(\sigma \circ f)(X_1, ..., X_n) = f(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}).$$

Tādējādi katrai σ ir definēta funkcija

$$T_\sigma : k[X_1, ..., X_n] \to k[X_1, ..., X_n],$$
$$T_\sigma(f) = \sigma \circ f.$$

1.1. piezīme. Kā speciālgadījumu var definēt permutācijas darbību monomu kopā.

1.3. piemērs. Ja $f = X_1 + X_2X_3$ un $\sigma = (12)$, tad

$$(\sigma \circ f)(X_1, X_2, X_3) = X_{\sigma(1)} + X_{\sigma(2)}X_{\sigma(3)} = X_2 + X_1X_3.$$

n-argumentu polinomu f sauksim par *simetrisku polinomu (SP)*, ja

$$\sigma \circ f = f$$

katram $\sigma \in \Sigma_n$. Citiem vārdiem sakot, veicot jebkādu argumentu permutāciju, polinoms nemainās.

1.4. piemērs. Simetriskie polinomi - $X_1X_2X_3$, $X_1 + X_2$, X_1X_2, $X^2 + XY + Y^2$.

Nesimetriski polinomi - $X_1^2X_2$, $X + 2Y$.

1.1.3. Simetrisko polinomu klases

SP sauksim par *elementāru SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$e_k(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}.$$

Definēsim arī $e_0 = 1$.

1.5. piemērs. Ja $n = 1$, tad ir definēts tikai

$$e_1(X) = X.$$

Ja $n = 2$, tad ir definēti

$$\begin{aligned} e_1(X_1, X_2) &= X_1 + X_2, \\ e_2(X_1, X_2) &= X_1 X_2. \end{aligned}$$

Ja $n = 3$, tad ir definēti

$$\begin{aligned} e_1(X_1, X_2, X_3) &= X_1 + X_2 + X_3, \\ e_2(X_1, X_2, X_3) &= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3, \\ e_3(X_1, X_2, X_3) &= X_1 X_2 X_3. \end{aligned}$$

1.6. piemērs. Atverot iekavas izteiksmei

$$(X - c_1)(X - c_2)...(X - c_n),$$

iegūsim

$$X^n - e_1(c_1, ..., c_n)X^{n-1} + e_2(c_1, ..., c_n)X^{n-2} + ... + (-1)^{n+1}e_n(c_1, ..., c_n).$$

SP sauksim par *pakāpju summu SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$p_k(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Definēsim arī $p_0 = n$.

1.7. piemērs. Ja $n = 1$, tad var definēt

$$p_k(X) = X^k.$$

Ja $n = 2$, tad var definēt

$$p_k(X_1, X_2) = X_1^k + X_2^k.$$

Ja $n = 3$, tad var definēt

$$p_k(X_1, X_2, X_3) = X_1^k + X_2^k + X_3^k.$$

SP sauksim par *pilno homogēno SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$h_k(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}.$$

Definēsim arī $h_0 = 1$.

1.8. piemērs. Ja $n = 1$, tad ir definēts tikai

$$h_1(X) = X.$$

Ja $n = 2$, tad ir definēti

$$h_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2,$$
$$h_2(X_1, X_2) = X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2.$$

Ja $n = 3$, tad ir definēti

$$h_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3,$$
$$h_2(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3 + X_3^2,$$
$$h_3(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 +$$
$$X_1X_2X_3 + X_2^3 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2 + X_3^3.$$

Ja ir dots monoms $X^\mu = X_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n}$, tad par *$\mu$-monomiālo SP* sauksim

$$S(X^\mu) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \sigma \circ X^\mu = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} X_{\sigma(1)}^{\mu_1} X_{\sigma(2)}^{\mu_2} ... X_{\sigma(n)}^{\mu_n}.$$

1.9. piemērs.

$$S(X_1) = S(X_i) = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$$S(X_1^2) = S(X_i^2) = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$$S(X_1 X_2) = 2(n-1)! \sum_{i<j}^{n} X_i X_j.$$

1.2. piezīme. Var redzēt, ka

$$e_k = c \cdot S(X_1 X_2 ... X_k),$$

$$p_k = c \cdot S(X_1^k).$$

1.2. Simetrisko polinomu īpašības

1.3. teorēma. Ja $f \in k[X_1, ..., X_n]^S$ satur monomu aX^μ, tad katram σ tas satur monomu $a(\sigma \circ X^\mu)$.

PIERĀDĪJUMS

1.4. teorēma. Permutācijas darbība polinomu gredzenā ir gredzenu homomorfisms.

PIERĀDĪJUMS Ir jāpierāda, ka fiksētas permutācijas σ darbība saglabā summu un reizinājumu.

Ja

$$f(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1...i_n} X_1^{i_i} ... X_n^{i_n},$$

$$g(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} b_{i_1...i_n} X_1^{i_i} ... X_n^{i_n},$$

tad

$$(\sigma \circ f)(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1...i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} ... X_{\sigma(n)}^{i_n},$$

$$(\sigma \circ g)(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} b_{i_1...i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} ... X_{\sigma(n)}^{i_n}.$$

Redzam, ka

$$(\sigma \circ (f+g))(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} (a_{i_1...i_n} + b_{i_1...i_n}) X_{\sigma(1)}^{i_i} ... X_{\sigma(n)}^{i_n} = \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1...i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} ... X_{\sigma(n)}^{i_n} + \sum_{i_1,...,i_n} b_{i_1...i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} ... X_{\sigma(n)}^{i_n} =$$

$$(\sigma \circ f)(X_1, ..., X_n) + (\sigma \circ g)(X_1, ..., X_n) = (\sigma \circ f + \sigma \circ g)(X_1, ..., X_n).$$

Reizināšanas saglabāšanu no sākuma pierādīsim uz monomiem, pēc tam no tikko pierādītās summas saglabāšanas sekos reizināšanas saglabāšana patvaļīgiem polinomiem.

Redzam, ka

$$\sigma \circ X_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n} = X_{\sigma(1)}^{\mu_1}...X_{\sigma(n)}^{\mu_n},$$
$$\sigma \circ X_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n} = X_{\sigma(1)}^{\nu_1}...X_{\sigma(n)}^{\nu_n},$$

un

$$\sigma \circ (X_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n} \cdot X_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n}) = \sigma \circ (X_1^{\mu_1+\nu_1}...X_n^{\mu_n+\nu_n}) =$$
$$X_{\sigma(1)}^{\mu_1+\nu_1}...X_{\sigma(n)}^{\mu_n+\nu_n} = X_{\sigma(1)}^{\mu_1}...X_{\sigma(n)}^{\mu_n} \cdot X_{\sigma(1)}^{\nu_1}...X_{\sigma(n)}^{\nu_n} =$$
$$(\sigma \circ X_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n}) \cdot (\sigma \circ X_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n}).$$

Ja

$$f = \sum_i f_i,$$

$$g = \sum_j g_j,$$

kur f_i, g_j ir monomi, tad

$$\sigma \circ (fg) = \sigma \circ (\sum_{i,j} f_i g_j) = \sum_{i,j} \sigma \circ (f_i g_j) = \sum_{i,j} (\sigma \circ f_i)(\sigma \circ g_j) =$$

$$(\sum_i \sigma \circ f_i)(\sum_j \sigma \circ g_j) = (\sigma \circ \sum_i f_i)(\sigma \circ \sum_j g_j) = (\sigma \circ f)(\sigma \circ g).$$

1.5. teorēma. Katram n SP ar n argumentiem veido apakšgredzenu gredzenā $R[X_1, ..., X_n]$.

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka divu SP summa un reizinājums ir SP.

Ja $f, g \in k[X_1, ..., X_n]$ ir SP, tad

$$\sigma \circ f = f, \forall \sigma,$$
$$\sigma \circ g = g, \forall \sigma.$$

Redzam, ka

$$\sigma \circ (f + g) = \sigma \circ f + \sigma \circ g = f + g, \forall \sigma,$$
$$\sigma \circ (fg) = (\sigma \circ f)(\sigma \circ g) = fg, \forall \sigma.$$

■

Visu SP apakšgredzenu apzīmē ar $R[X_1, ..., X_n]^S$.

1.6. teorēma.

1. Ja f ir homogēns polinoms ar pakāpi m, tad $\sigma \circ f$ arī ir homogēns polinoms ar kārtu m.
2. Ja g ir izteikts homogēnu saskaitāmo summas veidā

$$g = g_0 + g_1 + ... + g_l,$$

tad

$$\sigma \circ g = \sigma \circ g_0 + \sigma \circ g_1 + ... + \sigma \circ g_l.$$

PIERĀDĪJUMS Acīmredzami.

Monomu $aX^{(\mu_1,...,\mu_n)}$ sauksim par monotonu, ja

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n.$$

1.7. teorēma. Simetriska polinoma vecākais loceklis ir monotons.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka simetriska polinoma f vecākais loceklis ir

$$aX_1^{\mu_1}...X_i^{\mu_i}X_{i+1}^{\mu_{i+1}}...X_n^{\mu_n}, \text{ kur } \mu_i < \mu_{i+1}.$$

Tā kā f ir simetriska, tad f satur monomu

$$\mathcal{M} = aX_1^{\mu_1}...X_i^{\mu_{i+1}}X_{i+1}^{\mu_i}...X_n^{\mu_n}.$$

Redzam, ka

$$\mathcal{M} \succ aX_1^{\mu_1}...X_i^{\mu_i}X_{i+1}^{\mu_{i+1}}...X_n^{\mu_n} = \mathcal{H}(f),$$

kas ir pretruna.

■

1.8. teorēma. Katru SP var izteikt monomiālo polinomu lināras kombinācijas veidā: ja $f \in k[X_1, ..., X_n]^S$, tad

$$f = \sum_{\mu} c_\mu S(X^\mu).$$

PIERĀDĪJUMS Pietiek pierādīt apgalvojumu homogēnam SP f.

Ja f satur monomu $a_1 X^{\mu_1}$, tad tas satur arī visu $a_1 S(X^{\mu_1})$. Definēsim $f_1 = f - a_1 S(X^{\mu_1})$.

Ja $f_1 \neq 0$, tad tas satur vismaz vienu monomu $a_2 S(X^{\mu_2})$, tātad arī $a_2 S(X^{\mu_2})$. Definēsim $f_2 = f - a_1 S(X^{\mu_1}) - a_2 S(X^{\mu_2})$.

Turpināsim šo procesu. Pēc galīga skaita soļiem iegūsim $f_l = 0$. Seko teorēmas apgalvojums. ■

1.3. Simetrisko polinomu pamatteorēma

1.3.1. Teorija

1.9. teorēma. Jebkuru simetrisku polinomu $f \in R[X_1, ..., X_n]$ var viennozīmīgi izteikt formā

$$f(X_1, ..., X_n) = \varphi(s_1, ..., s_n),$$

kur $g \in R[Y_1, ..., Y_n]$.

PIERĀDĪJUMS Pietiek pierādīt apgalvojumu homogēniem SP. Tāpēc pieņemsim, ka f ir homogēns SP.

1.solis Eksistence un algoritms.

Pierādīsim, ka katram SP $f \in R[X_1, ..., X_n]$ eksistē $g \in R[Y_1, ..., Y_n]$ tāds, ka

$$f(X_1, ..., X_n) = g(e_1(X_1, ..., X_n), ..., e_n(X_1, ..., X_n)).$$

Pieņemsim, ka simetriska polinoma f vecākais loceklis ir

$$\mathcal{H}(f) = aX_1^{\mu_1} ... X_n^{\mu_n}, \text{ kur } \mu_i < \mu_{i+1}.$$

Definēsim

$$f_1 = f - a e_1^{\mu_1-\mu_2} e_2^{\mu_2-\mu_2} ... e_n^{\mu_n}.$$

Redzam, ka

$$\deg(e_1^{\mu_1-\mu_2} e_2^{\mu_2-\mu_2} ... e_n^{\mu_n}) =$$
$$(\mu_1 - \mu_2) + 2(\mu_2 - \mu_3) + ... + n\mu_n =$$
$$\mu_1 + \mu_2 + ...\mu_n = \deg(f).$$

Redzam, ka f_1 ir simetrisks polinoms ar pakāpi m.

Atradīsim $\mathcal{H}(a e_1^{\mu_1-\mu_2} e_2^{\mu_2-\mu_2} ... e_n^{\mu_n})$. Saskaņā ar vecākā locekļa multiplikativitātes īpašību

$$\mathcal{H}(ae_1^{\mu_1-\mu_2}e_2^{\mu_2-\mu_2}...e_n^{\mu_n}) = a\mathcal{H}(e_1^{\mu_1-\mu_2})\mathcal{H}(e_2^{\mu_2-\mu_3})...\mathcal{H}(e_n^{\mu_n}) =$$
$$a\mathcal{H}(e_1)^{\mu_1-\mu_2}\mathcal{H}(e_2)^{\mu_2-\mu_3}...\mathcal{H}(e_n)^{\mu_n} =$$
$$aX_1^{\mu_1-\mu_2}(X_1X_2)^{\mu_2-\mu_3}...(X_1...X_n)^{\mu_n} = aX_1^{\mu_1}X_2^{\mu_2}...X_n^{\mu_n} = \mathcal{H}(f).$$

Seko, ka

$$\mathcal{H}(f) \succ \mathcal{H}(f_1).$$

Pieņemsim, ka simetriska polinoma f_1 vecākais loceklis ir

$$\mathcal{H}(f_1) = bX_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n}, \text{ kur } \nu_i < \nu_{i+1}.$$

Definēsim

$$f_2 = f_1 - be_1^{\nu_1-\nu_2}e_2^{\nu_2-\nu_2}...e_n^{\nu_n}.$$

Spriežot līdzīgi, iegūsim, ka

$$\mathcal{H}(f) \succ \mathcal{H}(f_1) \succ \mathcal{H}(f_2).$$

Turpinot šo procesu, pēc galīga skaita soļiem iegūsim simetrisku polinomu $f_l = 0$, tāpēc

$$f = ae_1^{\mu_1-\mu_2}...e_n^{\mu_n} + be_1^{\nu_1-\nu_2}...e_n^{\nu_n} + ... = g(e_1, ..., e_n) \in k[e_1, ..., e_n].$$

2.solis Vienīgums.
Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi polinomi g_1, g_2 tādi, ka

$$f = g_1(e_1, ..., e_n) = g_2(e_1, ..., e_n).$$

Apskatīsim $g = g_1 - g_2 \neq 0$. No otras puses,

$$g(e_1(X_1, ..., X_n), ..., e_n(X_1, ..., X_n)) = 0.$$

Katram monomam $aY_1^{\lambda_1}...Y_n^{\lambda_n}$, $a \neq 0$, izpildās

$$\mathcal{H}(ae_1^{\lambda_1}e_2^{\lambda_2}...e_n^{\lambda_n}) = aX_1^{\lambda_1}(X_1X_2)^{\lambda_2}...(X_1X_2...X_n)^{\lambda_n} = aX_1^{\lambda_1+...\lambda_n}X_2^{\lambda_2+...+\lambda_n}...X_n^{\lambda_n}.$$

Ja g satur vienu monomu $aY_1^{\lambda_1}...Y_n^{\lambda_n}$, $a \neq 0$, tad

$$\mathcal{H}(ae_1^{\lambda_1}e_2^{\lambda_2}...e_n^{\lambda_n}) = aX_1^{\lambda_1+...\lambda_n}X_2^{\lambda_2+...+\lambda_n}...X_n^{\lambda_n} \neq 0.$$

Pieņemsim, ka g satur vismaz divus monomus

$$\mathcal{M} = aY_1^{\lambda_1}...Y_n^{\lambda_n}, a \neq 0,$$
$$\mathcal{M}' = bY_1^{\gamma_1}...Y_n^{\gamma_n}, b \neq 0,$$

kuriem izpildās nosacījums $\mathcal{M} \succ \mathcal{M}'$. Ievietojot Y vietā e, iegūsim, ka

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}(e)) \succ \mathcal{H}(\mathcal{M}'(e)),$$

tāpēc vienīgajam $g(Y)$ vecākajam monomam atbildīs vienīgais vecākais $g(e)$ monoms un iegūsim, ka $g(e) \neq 0$, kas ir pretruna.

■

1.3. piezīme. Līdzīgi rezultāti ir spēkā arī pakāpju summu SP un pilnajiem homogēnajiem SP:

- $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]^S = \mathbb{Q}[p_1, ..., p_n]$,
- $k[X_1, ..., X_n]^S = k[h_1, ..., h_n]$.

1.4. Algoritmi SP izteikšanai ar elementāro SP palīdzību

SP izteikšanu ar elementāro SP palīdzību sauksim par tā *elementarizāciju*.

1.4.1. Teorēmas algoritms

Var izmantot algoritmu, kas ir dots teorēmas pierādījumā.

1.10. piemērs. Izteiksim $f = X_1^4 + X_2^4$ kā funkciju no elementārajiem SP:

1. $f \to f_1 = f - e_1^4 = -4X_1^3X_2 - 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3$.
2. $f_1 \to f_2 = f_1 + 4e_1^2e_2 = 2X_1^2X_2^2$.
3. $f_2 \to f_3 = f_2 - 2e_2^2$.

Redzam, ka

$$f = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2.$$

1.4.2. Nenoteikto koeficientu metode

Ja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ir monotons pakāpju vektors, tad apzīmēsim

$$E(\alpha) = e_1^{\alpha_1 - \alpha_2} e_2^{\alpha_2 - \alpha_3} ... e_n^{\alpha_n}.$$

Homogēna SP f elementarizācijas algoritms:

1. Izteikt f kā monomiālo SP lineāru kombināciju

$$f = \sum_{\mu} a_\mu S(X^\mu),$$

   kur X^μ ir vecākais no visiem $S(X^\mu)$ monomiem.

2. Katram μ, kas figurē summā ar nenulles koeficientu atrast visus

$|\mu|$ sadalījumus $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_l,$$
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = |\mu|.$$

Šādu pakāpju vektoru kopu apzīmēsim ar $\mathcal{T}$.

3. Katram μ meklējam $S(X^\mu)$ formā

$$S(X^\mu) = E(\mu) + \sum_{\tau \in \mathcal{T}} b_\tau E(\tau),$$

kur koeficienti b_τ tiek atrast liekot X_i vietā konkrētus mazus veselus skaitļu, parasti 0 un ± 1.

1.11. piemērs. Elementarizēsim $X_1^5 + X_2^5$. Tas ir homogēns un vienāds ar $S(X_1^5)$. Ir iespējami 5 monotoni pakāpju vektori ar pakāpi 5: $(5,0)$, $(4,1)$ un $(3,2)$. Elementarizācija ir jāmeklē formā

$$X_1^5 + X_2^5 = e_1^5 + ae_1^3 e_2 + be_1 e_2^2$$

ar pagaidām nezināmiem a, b.

Ja $(X_1, X_2) = (1, 1)$, tad iegūsim vienādojumu

$$2 = 2^5 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2.$$

Ja $(X_1, X_2) = (1, 2)$, tad iegūsim vienādojumu

$$1 + 2^5 = 3^5 + a \cdot 3^3 \cdot 2 + b \cdot 3 \cdot 2^2.$$

Iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} 4a + b = -15 \\ 9a + 2b = -35 \end{cases}$$

Atrisinājums ir $(a, b) = (-5, 5)$, tāpēc

$$X_1^5 + X_2^5 = e_1^4 - 5e_1^3 e_2 + 5e_1 e_2^2.$$

1.4. piezīme. Var izmantot Grobnera bāzes. Sīkāk šo pieeju neapskatīsim. Interesenti var lasīt literatūru par GB.

2. 12.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Izteikt dotos SP izmantojot elementāros SP:

(a) $X_1^3 + X_2^3$;
(b) $X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1 X_2^3 + X_1 X_3^3 + X_2^3 X_3 + X_2 X_3^3$;
(c) $(X_1 X_2 + X_3)(X_1 X_3 + X_2)(X_2 X_3 + X_1)$.

12.2 c_1, c_2, c_3 ir vienādojuma

$$X^3 + 2X^2 + 3X + 4 = 0$$

saknes. Atrodiet lielumu

$$\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2}.$$

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.3 Vispāriniet apgalvojumu par permutācijas sadalījumu ciklos uz šādiem gadījumiem:

(a) kopa A ir galīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva,
(b) kopa$A$ ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ ir bijektīva,
(c) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva.

12.4 Piedāvājiet algoritmus SP izteikšanai

(a) ar pakāpju summu SP palīdzību,
(b) ar pilno homogēno SP palīdzību.