DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Grobnera bāzes - interpretācijas un pierādījumi

1.1. Ģeometriskās interpretācijas

Monoms aX^{μ} tiek interpretēts kā punkts/vektors μ ar svaru a.

Vienkāršības dēļ var apskatīt 2 argumentu gadījumu.

1.1.1. Vienkāršākie jēdzieni

Var interpretēt šādus jēdzienus un operācijas:

- polinomu,
- monomiālo sakārtojumu,
- polinomu sakārtojumu,
- monomu dalāmību,

- monomu kopu, kas dalās/nedalās ar doto monomu,
- faktu, ka neviens f monoms nedalās ar $\mathcal{H}(g)$,
- divu vai vairāku monomu vai polinomu lineāru kombināciju,
- elementāro redukcijas operāciju $f \to f - \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} g$,
- polinoma f redukciju ar g,
- polinoma f redukciju ar $g_1, ..., g_m$.

1.1.2. Jēdzieni, kas ir saistīti ar Grobnera bāzēm

Var interpretēt šādus jēdzienus un operācijas:

- ideāla I elementu vecāko locekļu kopu $\mathcal{H}(I)$, ja monoms $X^\mu \in \mathcal{H}(I)$, tad $X^{\mu+\lambda} \in \mathcal{H}(I)$ katram $\lambda \in \mathbb{N}^{*n}$,
- kopas $\mathcal{H}(I)$ "stūrus" (tā ir galīga kopa saskaņā ar Diksona lemmu),
- GB definējošā īpašība - GB ir polinomu kopa ar īpašību, ka katra ideāla elementa vecākais loceklis atrodas kāda GB elementa

vecākā locekļa ēnā, seko, ka GB vecāko locekļu kopa satur visus "stūrus",

- GB īpašība, ka var atmest GB elementus, kuru vecākie locekļi dalās ar kāda cita GB elementa vecāko locekli,
- GB neviennozīmīgums - var pievienot jebkurus ideāla elementus, "stūri" saglabāsies.

1.2. Pierādījumi

1.2.1. Buhbergera algoritma pareizība

1.1. teorēma. Buhbergera algoritms apstājas pēc galīga skaita soļu realizācijas un tā rezultāts ir GB.

PIERĀDĪJUMS Ja algoritms ir apstājies, tad jebkuriem diviem polinomiem f_i, f_j izpildās $\overline{S(f_i, f_j)}^{\mathcal{F}} = 0$, tāpēc ir iegūta GB.

Vecākais loceklis katram polinomam, kas tiek pievienots algoritma rezultātā, ir mazāks nekā visu iepriekšējo polinomu vecākie locekļi. Tas nozīmē, ka pēc galīga skaita soļu izpildes algoritms apstāsies.

■

1.2.2. Reducētās Grobnera bāzes vienīgums

1.2. teorēma. Katram ideālam $I \in k[X_1, ..., X_n]$ eksistē viena un tikai viena RGB.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka ideālam I eksistē divas RGB

$$\{g_1, ..., g_m\},$$
$$\{h_1, ..., h_l\}.$$

1.solis $m = l$ **un** $\mathcal{H}(g_i) = \mathcal{H}(h_i)$ **pēc atbilstošas permutācijas.**

Kādam i izpildās $\mathcal{H}(h_i)|\mathcal{H}(g_1)$, pārkārtosim h-bāzes elementus tā, lai $i = 1$.

Kādam j izpildās $\mathcal{H}(g_j)|\mathcal{H}(h_1)$, bet tad $\mathcal{H}(g_j)|\mathcal{H}(g_1)$, tātad $j = 1$. Redzam, ka

$$\mathcal{H}(g_1) = \mathcal{H}(h_1).$$

Turpinot šo spriedumu iegūsim, ka

$$\mathcal{H}(g_2) = \mathcal{H}(h_2),$$
$$...,$$
$$\mathcal{H}(g_m) = \mathcal{H}(h_m).$$

2.solis $g_i = h_i$**.**

Apskatīsim $g_1 - h_1$. Neviens no tā monomiem nedalās ne ar vienu no $\mathcal{H}(g_1)$, tātad $g_1 - h_1 = 0 \in I$.

Turpinot šo spriedumu, iegūsim, ka $g_i - h_i = 0$ visiem i.

3.solis RGB **eksistence.**

Pieņemsim, ka ir dota MGB $\{g_1, ..., g_m\}$.

Atradīsim RGB saskaņā ar šādu algoritmu:

1. Aizvietosim g_1 ar tā redukciju mod $\{g_2, ..., g_m\}$, ko apzīmēsim ar g_1', iegūsim jaunu MGB $\{g_1', g_2, ..., g_m\}$, kurā neviens g_1' monoms

nedalās ne ar vienu no $\mathcal{H}(g_2)$,...,$\mathcal{H}(g_m)$. Ievērosim, ka $\mathcal{H}(g_1') = \mathcal{H}(g_1)$, tāpēc jaunā kopa atkal ir MGB.

2. Aizvietosim g_2 ar tā redukciju mod $\{g_1', g_3, ..., g_m\}$, ko apzīmēsim ar g_2', iegūsim jaunu MGB $\{g_1', g_2', g_3, ..., g_m\}$, kurā neviens g_2' monoms nedalās ne ar vienu no $\mathcal{H}(g_1)$,...,$\mathcal{H}(g_m)$. Ievērosim, ka $\mathcal{H}(g_2') = \mathcal{H}(g_2)$, tāpēc jaunā kopa atkal ir MGB.
3. ...
4. Aizvietosim g_m ar tā redukciju mod $\{g_1', g_2', ..., g_{m-1}'\}$, ko apzīmēsim ar g_m', iegūsim jaunu MGB $\{g_1', g_2', g_3', ..., g_m'\}$, kurā neviens g_m' monoms nedalās ne ar vienu no $\mathcal{H}(g_1)$,...,$\mathcal{H}(g_{m-1})$. Ievērosim, ka $\mathcal{H}(g_m') = \mathcal{H}(g_m)$, tāpēc jaunā kopa atkal ir MGB.

Šī algoritma rezultātā iegūsim RGB.
■

2. Grobnera bāzu pielietojumi

2.1. Algebrisko vienādojumu sistēmu risināšana

2.1.1. Algebriskas vienādojumu sistēmas seku ideāls

Pieņemsim, ka ir dota algebrisku vienādojumu sistēma (AVS)

$$\begin{cases} g_1(X_1, ..., X_n) = 0 \\ g_2(X_1, ..., X_n) = 0 \\ ... \\ g_m(X_1, ..., X_n) = 0 \end{cases}$$

Ja elementu virkne $(X_1, ..., X_n)$ apmierina sistēmu, tad tā apmierina arī jebkuru vienādojumu

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + ... + f_m g_m = 0.$$

Šādu vienādojumu kreisās puses var interpretēt kā ideāla elementus.

Ideālu $I = (g_1, g_2, ..., g_m)$ sauc par dotās algebriskās sistēmas *seku ideālu*.

Ideālam I var atrast GB vai RGB. Izrādās, ka GB elementiem atbilstošos vienādojumus bieži vien ir ērtāk risināt nekā sākotnējos vienādojumus.

2.1.2. Izslēgšanas ideāli

Viena no vēlmēm AVS risināšanā ir iegūt seku vienādojumus, kas ir atkarīgi no pēc iespējas mazāka skaita nezināmo - *izslēgt nezināmos*.

Par *i-to izslēgšanas ideālu* I_i $(1 \leq i < n)$ sauc ideālu

$$I \cap k[X_{i+1}, ..., X_n].$$

Redzam, ka I_i elementi nav atkarīgi no nezināmajiem $X_1, ..., X_i$.

2.1. teorēma. Ja $\mathcal{F}$ ir ideāla I GB, tad $\mathcal{F} \cap k[X_{i+1}, ..., X_n]$ ir ideāla I_i GB.

PIERĀDĪJUMS Ja $f \in I_i$, tad $\mathcal{H}(g_j)|\mathcal{H}(f)$ kādam j.

$\mathcal{H}(g_j)$ nedalās ar $X_1, ..., X_i$, tāpēc arī visi g_j locekļi nedalās ar $X_1, ..., X_i$, jo tie ir mazāki nekā $\mathcal{H}(g_j)$.

Seko, ka $g_j \in \mathcal{F} \cap k[X_{i+1}, ..., X_n]$.

Tā kā katram $f \in I_i$ eksistē elements $g_j \in \mathcal{F} \cap k[X_{i+1}, ..., X_n]$ tāds, ka $\mathcal{H}(g_j)|\mathcal{H}(f)$, tad pēc definīcijas $\mathcal{F} \cap k[X_{i+1}, ..., X_n]$ ir ideāla I_i GB. ∎

2.1.3. Algebriskas vienādojumu sistēmas risināšanas algoritms

AVS risināšanai var izmantot šādu algoritmu:

1. Atrast seku ideāla I RGB,
2. Risināt AVS sākot no vienādojumiem ar mazāku nezināmo skaitu.

2.1. piemērs. Sistēmai

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \\ X^2 + Z^2 = Y \\ X = Z \end{cases}$$

GB ir

$$\{X - Z, Y - 2Z^2, Z^4 + \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{4}\}.$$

No sākuma atrodam Z, tad Y un beigās X.

Sistēmai

$$\begin{cases} X^3 - X - Y^2 = 0 \\ X^2 - Y^3 = 0 \end{cases}$$

RGB ir

$$\{X + Y^2 + Y^4 - Y^7, Y^9 - 2Y^6 - Y^4 + Y^3\}.$$

No sākuma atrodam Y, tad X.

2.2. Parametriskā pieraksta pārveidošana vispārīgajā (implicitizācija)

2.2.1. Implicitizācijas problēma

Pieņemsim, ka Dekarta telpas $\mathbb{R}^n$ apakškopa ir uzdota parametriski ar sistēmu

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(t_1, ..., t_m) \\ X_2 = \varphi_2(t_1, ..., t_m) \\ ... \\ X_n = \varphi_n(t_1, ..., t_m) \end{cases}$$

Var uzdot šādu jautājumus:

- vai koordinātes $X_1, ..., X_n$ ir saistītas ar polinomiālām sakarībām,
- kā atrast šādas sakarības.

2.2. piemērs. Ja

$$\begin{cases} X = X_0 + pt \\ Y = Y_0 + qt \\ Z = Z_0 + rt, \end{cases}$$

tad koordinātes saista divu lineāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \frac{X-X_0}{p} = \frac{Y-Y_0}{q} \\ \frac{X-X_0}{p} = \frac{Z-Z_0}{r} \end{cases}$$

2.2.2. Implicitizācijas algoritms ar Grobnera bāzu izmantošanu

Implicitizācijas problēmu var mēģināt risināt gadījumā, kad funkcijas φ_i ir polinomi izmantojot Grobnera bāzes saskaņā ar šādu algoritmu:

1. Definēt *implicitizācijas ideālu* $I = (f_1, ..., f_n)$, kur

$$f_i = X_i - \varphi_i(t_1, ..., t_m).$$

2. Atrast I GB $\mathcal{F}$ ar leksikogrāfisko sakārtojumu, kas atbilst argumentu kārtībai $t_1 \succ t_2 \succ ...t_m \succ X_1 \succ ...X_n$.

3. Ja $\mathcal{F}$ satur elementus, kas nesatur $t_1, ..., t_m$, tad ir iegūtas sakarības starp $X_1, ..., X_n$.

2.3. piemērs. Pieņemsim, ka telpā $\mathbb{R}^3$ līkne ir uzdota parametriski ar sistēmu

$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^3 \\ Z = t^2 \end{cases}$$

Šajā gadījumā implicitizācijas ideāls ir

$$I = t^4 - X, t^3 - Y, t^2 - Z.$$

Tā RGB ir

$$\mathcal{F} = \{t^2 - Z, tY - Z^2, tZ - Y, X - Z^2, Y^2 - Z^3\}.$$

Redzam, ka līknes punkti apmierina divas sakarības

$$X - Z^2 = 0,$$
$$Y^2 - Z^3 = 0.$$

Ja $f, g \in k[X_1, ..., X_n]$, tad pieņemsim, ka

$$\mathcal{H}(f) = aX^\alpha,$$
$$\mathcal{H}(g) = bX^\beta.$$

Definēsim

$$S(f, g) = \frac{X^\gamma}{\mathcal{H}(f)} \cdot f - \frac{X^\gamma}{\mathcal{H}(g)} \cdot g,$$

kur $X^\gamma = MKD(X^\alpha, X^\beta)$.

2.4. piemērs. Ja $f = XY + 1$ un $g = Y^2 - 1$, tad

$$S(f, g) = \frac{XY^2}{XY}(XY + 1) - \frac{XY^2}{Y^2}(Y^2 - 1) = X + Y.$$

3. 11.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Izmantojot Grobnera bāzes atrisināt vienādojumu sistēmas

(a)

$$\begin{cases} X^2 + 2Y^2 = 2 \\ X^2 + XY + Y^2 = 2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 4 \\ X^2 + 2Y^2 = 5 \\ XZ = 1 \end{cases}$$

11.2 Virsma telpā $\mathbb{R}^3$ ir uzdota parametriski ar sistēmu

$$\begin{cases} X = uv \\ Y = 1 - v \\ Z = u + v - uv \end{cases}$$

Atrodiet sakarības starp X, Y, Z izmantojot Grobnera bāzes.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.3 Virsma telpā $\mathbb{R}^3$ ir uzdota parametriski ar sistēmu

$$\begin{cases} X = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ Y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ Z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases}$$

Atrodiet sakarības starp X, Y, Z izmantojot Grobnera bāzes.