DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis - apgūt pamatfaktus par atvasinājuma izmantošanu polinomu faktorizācijā, faktorizāciju virs $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$.

Lekcijas kopsavilkums:

- izmantojot polinomu formālo atvasināšanu, var atrast to vairākkārtīgās saknes un kvadrātbrīvo sadalījumu reizinātājos.
- polinomi virs $\mathbb{C}$ faktorizējas lineāros polinomos,
- polinomi virs $\mathbb{R}$ faktorizējas lineāros un kvadrātiskos polinomos,
- pastāv formulas, ar kuru palīdzību var atrisināt 2.,3. un 4. pakāpes vienādojumus.

Svarīgākie jēdzieni: polinoma atvasinājums, polinoma nedalāma dalītāja kārta.

Svarīgākie fakti un metodes: vairākkārtīgās saknes kritērijs, teorēma par nedalāma dalītāja kārtu attiecībā uz polinoma atvasinājumu, kvadrātbrīvās faktorizācijas formula, $\mathbb{C}$ algebriskais slēgtums, faktorizācija virs $\mathbb{C}$, faktorizācija virs $\mathbb{R}$, Kardāno formulas.

1. Polinomu atvasināšana un tās pielietojumi faktorizācijā

1.1. Pamatfakti

Par polinoma $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ *(formālo) atvasinājumu* sauc polinomu

$$f'(X) = D(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1} \in R[X].$$

Ir spēkā parastās atvasinājumu īpašības, kas ir zināmas no matemātiskās analīzes kursa:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Var definēt arī augstāku kārtu atvasinājumus.

1.1. piemērs. $(X^n)' = nX^{n-1}$, $(a_0+a_1X)' = a_1$. $(X^p)' = 0$ gredzenā $\mathbb{F}_p[X]$.

1.2. Vairākkārtīgās saknes kritērijs

1.1. teorēma. k - lauks, $f \in k[X]$.

$$a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2 \iff \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

PIERĀDĪJUMS

Izdalīsim $f(X)$ ar $(X-a)^2$:

$$f(X) = q(X)(X-a)^2 + r(X), \text{ kur } \deg\Big(r(X)\Big) < 2.$$

$r(X)$ izdalīsim ar $(X-a)$:

$$r(X) = q_1 \cdot (X-a) + r_1, \text{ kur } \deg(r_1) < 1.$$

Apvienojot abus rezultātus vienā vienādībā, iegūsim

$$f(X) = q(X)(X-a)^2 + q_1 \cdot (X-a) + r_1.$$

Atradīsim $f'(X)$:

$$f'(X) = \Big(q(X)(X-a)^2 + q_1 \cdot (X-a) + r_1\Big)' =$$
$$= q'(X)(X-a)^2 + q(X) \cdot 2(X-a) + q_1.$$

$$a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2 \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

$$a \in \mathcal{V}^m(f) \Longrightarrow f(X) = q(X)(X-a)^2 \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ r_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2.$$

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = 0 \\ r_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow f(X) = q(X)(X-a)^2 \text{ un } a$$

ir vairākkārtīga sakne. ■

1.3. Polinoma dažādo nedalāmo dalītāju reizinājuma atrašana - kvadrātbrīvā faktorizācija

Saka, ka laukam k *harakteristika* (*raksturojums*, $char(k)$) ir vienāda ar $\chi \in \mathbb{P}$, ja $\chi \cdot 1 = 0$. Ja $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ n \cdot 1 \neq 0$, tad $char(k) = 0$.

1.2. piemērs. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - lauki ar harakteristiku 0. $\mathbb{F}_p$ - lauks ar harakteristiku p.

$p \in \mathcal{I}(k[X])$. Ja izpildās $\begin{cases} p^{\alpha} \Big| f \\ p^{\alpha+1} \nmid f, \end{cases}$ tad p kārtu attiecībā uz f definē vienādu ar α, $ord_p(f) = \alpha$.

1.2. teorēma. k - lauks, $char\ k = 0$, $f \in k[X]$, $p \in \mathcal{I}(k[X])$, $p \Big| f$. Tad

$$ord_p(f) = \alpha \implies ord_p(f') = \alpha - 1.$$

PIERĀDĪJUMS Ir dots, ka

$$f = p^\alpha g, \text{ kur } LKD(p, g) = 1 \implies$$

$$f' = \alpha p^{\alpha-1} p' g + p^\alpha g' = p^{\alpha-1} \underbrace{(\alpha p' g + p g')}_{\text{dalās ar } p?} \implies p^{\alpha-1} \Big| f'.$$

Pierādīsim, ka $p \nmid (\alpha p' g + p g')$. No tā sekos, ka $p^\alpha \nmid f'$.

Pieņemsim pretējo. $p \Big| (\alpha p' g + p g') \implies p \Big| \alpha p' g$.

$\deg(p) > \deg(p') \implies LKD(p, p') = 1$.

$$\begin{cases} LKD(p, g) = 1 \\ LKD(p, p') = 1 \end{cases} \implies p \nmid \alpha p' g \text{ - pretruna.}$$

$k[X]$ ir VFG $\implies p \nmid (kp'g + pg')$. ■

1.3. piemērs. $f = X^2(X+1)$, $ord_X(f) = 2$, $f' = X(3X+2)$, $ord_X(f') = 1$.

1.3. teorēma. (Kvadrātbrīvā faktorizācija) k - lauks, *char* $k = 0$, $f \in k[X]$. Tad

$$f = p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m} \implies \frac{f}{LKD(f, f')} = p_1 ... p_m.$$

PIERĀDĪJUMS No iepriekšējās teorēmas zinām, ka
$f' = p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1} h$, kur $p_i \nmid h \implies LKD(f, f') = p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1}$.

$$\implies \frac{f}{LKD(f, f')} = \frac{p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m}}{p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1}} = p_1 ... p_m. ■$$

1.4. piemērs. Faktorizēsim polinomu

$$f(X) = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

Atrodam $f'(X) = 5X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$.

Atrodam $LKD(f, f') = X^3 - X^2 - X + 1$ izmantojot Eiklīda algoritmu $\Longrightarrow$ $\dfrac{f}{LKD(f, f')} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

Dalot f vairākas reizes ar $X - 1$ un $X + 1$, iegūsim faktorizāciju

$$f(X) = (X-1)^3(X+1)^2.$$

2. Polinomu faktorizācija virs $\mathbb{C}$ un $\mathbb{R}$

2.1. Faktorizācija virs $\mathbb{C}$

2.1.1. Atkārtošana

Atkārtot šādus jēdzienus:

- algebriskā forma: $z = x + iy$,
- aritmētiskās operācijas: $\pm$, $\cdot$, $/$,
- kompleksā saistīšana: $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$,
- ģeometriskā interpretācija un polārie parametri, trigonometriskā forma (modulis un arguments): $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- Muavra formula, saknes aprēķināšana: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big),$$

- eksponenciālā forma, Eilera formula: $z = re^{i\varphi}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

2.1.2. $\mathbb{C}$ algebriskais slēgtums

Lauku k sauksim par *algebriski slēgtu*, ja $\forall\ f \in k[X]$, $\deg f \geq 1$: $\mathcal{V}(f) \neq \varnothing$.

Citas ekvivalentas definīcijas:

- tikai lineārie polinomi ir nedalāmi gredzenā $k[X]$;
- $\forall\ f \in k[X]$ sadalās lineāros reizinātājos;
- $\forall\ f \in k[X]$ sakņu multiplicitāšu skaits ir vienāds ar $\deg f$.

2.1. piemērs. $\mathbb{R}$ nav algebriski slēgts, jo polinoms X^2+1 ir nedalāms.
$\forall\ p \in \mathbb{P}$ lauks $\mathbb{F}_p$ nav algebriski slēgts.

2.1. teorēma. (*Algebras Pamatteorēma*) $\mathbb{C}$ ir algebriski slēgts lauks.

PIERĀDĪJUMS Aprakstīsim tikai pierādījuma galvenos soļus un palīgrezultātus.

Palīgrezultāti no matemātiskās analīzes.

A $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir polinomiāla funkcija $\Longrightarrow$ $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, kurā $|f(z)|$ pieņem savu minimālo vērtību.

B $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir nekonstanta polinomiāla funkcija un $|f(u)| \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\exists\ t \in \mathbb{C}$ tāds, ka

$$|f(t)| < |f(u)|.$$

Pierādījuma kopsavilkums.

$f \in \mathbb{C}[X]$. Saskaņā ar palīgrezultātu **A** $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, kurā $|f(z)|$ pieņem minimālo vērtību:

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ visiem } z \in \mathbb{C}.$$

Ja $|f(z_0)| \neq 0$, tad saskaņā ar palīgrezultātu **B** $\exists w_0 \in \mathbb{C}$ tāds, ka

$$|f(w_0)| < |f(z_0)| \text{ -- pretruna.} \blacksquare$$

2.1.3. Polinomu faktorizācija virs $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ir algebriski slēgts lauks $\Longrightarrow$ katrs $f \in \mathbb{C}[X]$ sadalās lineāros reizinātājos $\Longrightarrow$ saskaņā ar Bezout teorēmu ir jāatrod f saknes.

2.2. piemērs. Sadalīt reizinātājos polinomu $X^3 - 1$.

2.2. Faktorizācija virs $\mathbb{R}$

2.2.1. Nedalāmie polinomi virs $\mathbb{R}$

Izmantosim agrāk pierādītu faktu par faktorizāciju nedalāmos reizinātājos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tāpēc, ja

$$\begin{cases} f = up_1 p_2 ... p_n \text{ virs } \mathbb{R} \\ f = u' q_1 q_2 ... q_m \text{ virs } \mathbb{C}, \end{cases}$$

tad katrs p_i faktorizējas formā

$$p_i = q_{i_1} q_{i_2} ..., \text{ kur } q_{i_j} \in \{q_1, ..., q_m\}.$$

$\forall$ nedalāms polinoms virs $\mathbb{R}$ dalās nedalāmos polinomos virs $\mathbb{C}$ (kas var būt tikai lineāri).

2.2. teorēma. $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R}[X]) \implies \deg f \leq 2.$

PIERĀDĪJUMS

Pieņemsim, ka $f \in \mathbb{R}[X]$ ir sadalīts lineāros reizinātājos virs $\mathbb{C}$:

$$f(X) = u(X - z_1)...(X - z_n).$$

$$z \in \mathcal{V}(f) \implies \begin{cases} f(z) = 0 \\ \overline{f(z)} = \overline{0} = 0. \end{cases}$$

$f \in \mathbb{R}[X] \implies \overline{f} = f \implies \overline{f(z)} = \overline{f}(\overline{z}) = f(\overline{z}) = 0 \implies$
$\implies \overline{z} \in \mathcal{V}(f)$.

Tādējādi, $z \in \mathcal{V}(f) \implies \{z, \overline{z}\} \subseteq \mathcal{V}(f)$.

Esam ieguvuši šādu $\mathcal{V}(f)$:

$$\mathcal{V}(f) = \{ \underbrace{a_1, ..., a_k}_{\text{reālās saknes}}, \underbrace{z_1, \overline{z_1}, ..., z_l, \overline{z_l}}_{\text{kompleksās saknes}} \}$$

Seko, ka f faktorizējas virs $\mathbb{C}$ šādā veidā:

$$f(X) = u \underbrace{(X - a_1)...(X - a_k)}_{\text{reālās saknes}} \cdot \underbrace{(X - z_1)(X - \overline{z_1})...(X - z_l)(X - \overline{z_l})}_{\text{kompleksās saknes pa pāriem}}.$$

Mēģināsim apvienot kompleksos lineāros reizinātājus tā, lai iegūtu polinomus ar reāliem koeficientiem. Ievērosim, ka

$$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - (z+\overline{z})X + z\overline{z} = X^2 + pX + q \in \mathcal{I}(\mathbb{R}[X]),$$

jo tam nav reālu sakņu (ja būtu reālas saknes, tas būtu pretrunā ar to $\mathbb{C}[X]$ ir VFG).

Apvienojot visus kompleksi saistītos pārus, iegūsim $f \in \mathbb{R}[X]$ sadalījumu nedalāmos reizinātājos, kas ir noteikts viennozīmīgi:

$$f(X) = (X-a_1)^{\alpha_1}...(X-a_k)^{\alpha_k}(X^2+p_1X+q_1)^{\beta_1}...(X^2+p_lX+q_l)^{\beta_l}.$$

Tā kā f bija patvaļīgs, tad secinām, ka nedalāmi polinomi gredzenā $\mathbb{R}[X]$ var būt ar pakāpi 0, 1 vai 2. ■

2.3. piemērs. Sadalīt nedalāmos reizinātājos X^6-1 virs $\mathbb{R}$:

$$X^6 - 1 = (X^2)^3 - 1 = (X^2-1)(X^4+X^2+1) =$$
$$(X-1)(X+1)\underbrace{(X^4+X^2+1)}_{\text{grūti}}.$$

$$X^6 - 1 = (X^3)^2 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) =$$
$$= (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

2.2.2. Polinomu faktorizācija virs $\mathbb{R}$

Lai faktorizētu polinomu virs $\mathbb{R}$, var atrast tā saknes virs $\mathbb{C}$ un apvienot lineāros polinomu $X - z$ un $X - \overline{z}$.

2.3. Precīzās formulas polinomu saknēm ar pakāpi 3

del Ferro-Tartaglia-Cardano formulas

$f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Risināsim vienādojumu

$$f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c = 0.$$

1.solis - lineārā substitūcija.
Veiksim substitūciju

$$X \to Y = X + u$$

un pārveidosim vienādojumu:

$$(Y-u)^3 + a(Y-u)^2 + b(Y-u) + c =$$
$$Y^3 + (-3u+a)Y^2 + (3u^2 - 2au + b)Y + (-u^3 + au^2 - bu + c) = 0$$

Redzam, ka ņemot $u = \frac{a}{3}$, iegūsim vienādojumu formā

$$Y^3 + pY + q = 0.$$

2.solis - brīva parametra ieviešana.

Meklēsim Y formā

$$Y = \alpha + \beta,$$

ievietosim vienādojumā un iegūsim

$$(\alpha+\beta)^3 + p(\alpha+\beta) + q = (\alpha+\beta)(3\alpha\beta + p) + (\alpha^3 + \beta^3 + q) = 0.$$

3.solis - brīvības izmantošana redukcijai uz kvadrātvienādojumu.

Izmantojot brīvību, kas radās ieviešot vienu brīvības pakāpi, varam pieprasīt, ka izpildās sakarība starp α un β - vienādība

$$3\alpha\beta + p = 0.$$

Attiecībā uz α un β iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} \alpha\beta = -\dfrac{p}{3} \\ \alpha^3 + \beta^3 = -q. \end{cases}$$

vai sekojošu sistēmu (ar, iespējams, lielāku atrisinājumu kopu)

$$\begin{cases} \alpha^3\beta^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ \alpha^3 + \beta^3 = -q. \end{cases}$$

4.solis - sākotnējo nezināmo atrašana.

Atrisināsim sistēmu attiecībā uz α un β:

$$\begin{cases} \alpha^3 = \dfrac{-q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} \\ \beta^3 = \dfrac{-q + \sqrt{q^2 - \dfrac{4p^3}{27}}}{2}. \end{cases}$$

Redzam, ka

$$Y = \alpha + \beta = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}.$$

Kuba saknes ir jāizvēlas tā, lai izpildītos nosacījums

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

Kompleksajiem skaitļiem eksistē trīs kuba saknes, tā ka šķiet, ka vajadzētu rasties 9 saknēm, jo katru no α un β var izvēlēties 3 veidos. Īstenībā ir tikai 3 atrisinājumi.

3. 4.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Izmantojot kvadrātbrīvās faktorizācijas metodi sadaliet nedalāmajos reizinātājos polinomus:

(a) $X^5 + X^4 - 5X^3 - X^2 + 8X - 4$, virs $\mathbb{Q}$;

(b) $X^7 - 5X^6 + 12X^5 - 18X^4 + 18X^3 - 12X^2 + 5X - 1$, virs $\mathbb{Q}$;

4.2 $f \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt: $X - 1 \Big| f(X^n) \implies X^n - 1 \Big| f(X^n)$.

4.3 Sadalīt nedalāmajos reizinātājos virs $\mathbb{C}$ un virs $\mathbb{R}$.

(a) $X^5 + X^3 + X^2 + 1$;

(b) $X^8 - 1$.

4.4 Atrast minimālas pakāpes polinomu virs dotā lauka ar dotajām saknēm:

(a) virs $\mathbb{C}$, vienkāršas saknes 2 un $1 - i$, divkārša sakne $1 + i$,

(b) virs $\mathbb{R}$, vienkāršas saknes 1 un i, divkārša sakne $-1 - i$.

4.5 (*Kardano formulas*) Atrisināt kompleksos skaitļos vienādojumu

$$X^3 + 12X^2 + 45X + 50 = 0.$$

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Atrodiet $LKD(X^m + 1, X^n + 1)$ virs $\mathbb{C}$, kur $m, n \in \mathbb{N}$.