DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Faktorizācija vispārīgos un polinomu gredzenos **5**

1.1. Nedalāmie elementi 5

1.1.1. Pamatfakti 5

1.1.2. Galīgas faktorizācijas gredzeni 8

1.2. Viennozīmīgās faktorizācijas īpašība 10

1.2.1. Pamatfakti 10

1.2.2. Viennozīmīgā faktorizācija polinomu gredzenos 11

2. Polinomu faktorizācijas pamatfakti **13**

2.1. Nedalāmo polinomu skaits 13

2.2. Gredzenu iekļaušana un polinomu faktorizācija 14

2.3. Koeficientu LKD atdalīšana 15

2.4. Lineārie polinomi un polinomu saknes 16

2.4.1. Vienkāršās saknes - Bezout teorēma 16

2.4.2. Vairākkārtīgās saknes 19

2.5. Bezout teorēmas pielietojums - polinomu interpolācija 20

2.5.1. Pamatteorēma 20

2.5.2. Lagranža interpolācijas formula 22

3. 3.mājasdarbs **24**

3.1. Obligātie uzdevumi 24

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 25

Lekcijas mērķis - apgūt pamatfaktus par polinomu faktorizāciju, polinomu sadalīšanu lināros faktoros, apgūt pamatfaktus par polinomu interpolāciju.

Lekcijas kopsavilkums:

- polinomu gredzeniem virs laukiem ir spēkā aritmētikas pamatteorēmas analogs,
- eksistē bezgalīgi daudz nedalāmu normalizētu poliomu ar lauka koeficientiem;
- katrai polinoma f saknei atbilst viens f lineārs dalītājs, un otrādi;
- polinomus var atrast, ja ir zināmas to vērtības pietiekoši daudzām argumentu vērtībām.

Svarīgākie jēdzieni: nedalāms elements, galīgas faktorizācijas gredzens (GFG), viennozīmīgās faktorizācijas gredzens (VFG), nedalāms polinoms, normalizēts polinoms, polinoma saturs, primitīvs polinoms, polinoma sakne, polinoma m-kārtīga sakne, vairākkārtīga sakne.

Svarīgākie fakti un metodes: LKD un MKD aprēķināšana VFG, nedalāmo polinomu kopas bezgalīgums, teorēma par nedalāmu polinomu faktorizācija virs lielāka gredzena, koeficientu kopīga reizinātāja atdalīšana, polinoma sakņu īpašības, Bezout teorēma, Bezout teorēma vairākkārtīgām saknēm, Lagranža interpolācijas formula.

1. Faktorizācija vispārīgos un polinomu gredzenos

1.1. Nedalāmie elementi

1.1.1. Pamatfakti

$p \in R$, $p \neq 0$, sauc par *nedalāmu*, ja

$$\begin{cases} p \notin \mathcal{U}(R) \\ p = ab \implies a \in \mathcal{U}(R) \ \vee \ b \in \mathcal{U}(R). \end{cases}$$

R nedalāmo elementu kopu apzīmē ar $\mathcal{I}(R)$.

$R[X]$ nedalāmos elementus sauc par *nedalāmiem polinomiem virs R.*

1.1. piemērs. $X + 1$ - nedalāms virs $\forall$ lauka. X^2 - dalāms virs $\forall$ lauka. $X^2 + 1$ - nedalāms virs $\mathbb{R}$, bet dalāms virs $\mathbb{C}$ un $\mathbb{F}_2$.

$f \in k[X]$ sauc par *normalizētu*, ja tā vecākais koeficients ir vienāds ar 1. Katrai asociācijas klasei ir tieši viens normalizēts pārstāvis.

1.2. piemērs. $\mathbb{C}[X]$, $X - 1 \sim 2(X-1) \sim i(X-1) \sim c(X-1)$.

1.3. piemērs. Laukā nav nedalāmu elementu.

$\mathbb{Z}$ nedalāmie elementi ir $\pm$ pirmskaitļi.

Lineāri polinomi (ar pakāpi 1) virs lauka ir nedalāmi, tas seko no īpašības $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

1.1. teorēma. R- IG.

1. $\begin{cases} p \in \mathcal{I}(R) \\ u \in \mathcal{U}(R) \end{cases} \implies up \in \mathcal{I}(R).$
2. $\begin{cases} a, b \in \mathcal{I}(R) \\ a \big| b \end{cases} \implies a \sim b.$

PIERĀDĪJUMS

1. $up \notin \mathcal{I}(R) \implies up = p_1p_2 \implies p = (u^{-1}p_1)p_2 \implies p \notin \mathcal{I}(R)$.

2. $a\Big|b \implies b = qa.\ q \notin \mathcal{U}(R) \implies b \notin \mathcal{I}(R)$ - pretruna. ■

1.2. teorēma. k - lauks. Tad

$$p \in \mathcal{I}(k[X]) \implies \left(p\Big|ab \implies p\Big|a \ \vee \ p\Big|b\right).$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $ab \neq 0$. Definēsim $d = LKD(a,p)$.

$d\Big|p \implies d\Big|1$ vai $d \sim p$.

$d\Big|1 \implies d \sim 1 \implies LKD(p,a) \sim 1.$. Saskaņā ar iepriekš pierādītu apgalvojumu $p\Big|b$.

$d \sim p \implies d = up \implies up\Big|a \implies p\Big|a$. ■

1.1.2. Galīgas faktorizācijas gredzeni

IG R sauc par *galīgas faktorizācijas gredzenu (GFG, atomisku gredzenu)*, ja $\forall\ r \in R\backslash\mathcal{U}(R)$, $r \neq 0$, ir izsakāms galīga nedalāmu elementu reizinājuma veidā:

$$\exists\ \{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathcal{I}(R):\ r = x_1...x_n.$$

1.3. teorēma.

1. $\mathbb{Z}$ ir GFG.
2. R - IG un GFG $\Longrightarrow$ $R[X]$ ir GFG.

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no aritmētikas pamatteorēmas.

2. Izmantosim matemātisko indukciju pēc polinoma pakāpes.

Indukcijas bāze Ja $\deg(f) \in \{0, 1\}$, tad apgalvojums ir acīmredzams, jo nedalāmie R elementi un lineārie polinomi ir nedalāmi.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess $\forall\ f \in R[X] : \deg(f) < n$ un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess, ja $\deg(f) = n$.

$f \in \mathcal{I}(R[X]) \implies$ nekas nav jāierāda.

$f \notin \mathcal{I}(R[X]) \implies f = f_1 f_2$, kur $\deg f_i < n \implies$

f_i izsakās galīga nedalāmu elementu reizinājuma veidā saskaņā ar indukcijas pieņēmumu:

$$\begin{cases} f_1 = p_1 ... p_m \\ f_2 = q_1 ... q_l \end{cases} \implies f = f_1 f_2 = p_1 ... p_m q_1 ... q_l \implies$$

f izsakās galīga reizinājuma veidā. ■

1.4. piemērs. $\mathbb{Q}[X]$, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

1.2. Viennozīmīgās faktorizācijas īpašība

1.2.1. Pamatfakti

IG R sauc par *viennozīmīgas faktorizācijas gredzenu (VFG, faktoriāls gredzens)*, ja $\forall\ a \in R\backslash\{0\}$ ir izsakāms formā

$$a = \underbrace{u}_{\in\mathcal{U}(R)} \underbrace{p_1 p_2 ... p_k}_{p_i \in \mathcal{I}(R)},$$

kur šāds sadalījums ir noteikts viennozīmīgi ar precizitāti līdz elementu kārtībai un aizvietošanai ar asociētiem elementiem, citiem vārdiem sakot:

$$a = u p_1 p_2 ... p_k = u' p'_1 p'_2 ... p'_m \implies$$

1. $k = m$
2. pēc p'_i pārkārtošanas $\forall\ i\ \exists\ u_i \in \mathcal{U}(R)$ tāds, ka $p_i = u_i p'_i$.

1.5. piemērs. Jebkurš lauks ir VFG. $\mathbb{Z}$ ir VFG - teorēma par veselu skaitļu viennozīmīgo faktorizāciju pirmskaitļu pakāpju reizinājumā.

1.2.2. Viennozīmīgā faktorizācija polinomu gredzenos

1.4. teorēma. k - lauks $\Longrightarrow$ $k[X]$ - VFG.

PIERĀDĪJUMS $k[X]$ ir GFG. Jāpierāda, ka faktorizācija ir viennozīmīga ar precizitāti līdz invertējamiem reizinātājiem un kārtībai.

Pieņemsim, ka $f \in k[X]$ var izteikt kā nedalāmu elementu reizinājumu divos veidos:

$$f = p_1 p_2 ... p_n = p'_1 p'_2 ... p'_l.$$

$p_n \Big| f \Longrightarrow p_n$ dala vismaz vienu no nedalāmajiem elementiem $p'_1, ..., p'_l$, pieņemsim, ka $p_n \Big| p'_l$.

$\Longrightarrow p'_l = u_n p_n$, kur $u_n \in \mathcal{U}(R)$, jo $p'_l \in \mathcal{I}(R) \Longrightarrow$

$$p_1 p_2 ... p_{n-1} p_n = u_n p'_1 p'_2 ... p'_{l-1} p_n.$$

Izmantojot IG saīsināšanas īpašību, saīsinām ar p_n abas puses:

$$p_1 p_2 ... p_{n-1} = u_n p'_1 p'_2 ... p'_{l-1}.$$

Turpinām saīsināt reizinātājus šādā veidā. Var secināt, ka

- abās pusēs reizinātāji beigsies vienlaicīgi, jo pretējā gadījumā vienā pusē būtu neinvertējams elements, bet otrā invertējams $\Longrightarrow n = l$
- $\forall\, p'_i\ \exists\, p_j :\ p'_i = u_j p_j.$ ■

1.5. teorēma. Svarīgs fakts (pagaidām bez pierādījuma) - R - VFG $\Longrightarrow$ $R[X]$ - VFG. Piemēram, $\mathbb{Z}[X]$ ir VFG.

1.1. piezīme. LKD un MKD gredzenos $k[X]$ var atrast izmantojot faktorizāciju tāpat kā $\mathbb{Z}$.

2. Polinomu faktorizācijas pamatfakti

2.1. Nedalāmo polinomu skaits

2.1. teorēma. k - lauks. $k[X]$ satur bezgalīgi daudz nedalāmu normalizētu polinomu.

PIERĀDĪJUMS

1.apakšgadījums. $|k| = \infty \implies$ visi lineārie polinomi $X - a$, $a \in k$, veido nedalāmu normalizētu polinomu kopu.

2.apakšgadījums. Ja $|k| < \infty$, tad pierādījums ir līdzīgs pirmskaitļu kopas bezgalīguma pierādījumam.

Pieņemsim pretējo: eksistē tikai galīgs skaits nedalāmu normalizētu polinomu $p_1, ..., p_k$. Apskatīsim polinomu

$$f = p_1 ... p_k + 1.$$

$\deg(f) > 0 \implies \exists$ nedalāms f dalītājs $\sim p_l$.

$p_l \in \{p_1, ..., p_k\} \implies p_l \Big| f - p_1 ... p_k \implies p_l \Big| 1 \implies p_l$ - invertējams polinoms - pretruna. ■

2.2. Gredzenu iekļaušana un polinomu faktorizācija

R, S - unitāri IG, $R \leq S$. $f \in R[X]$ var uzskatīt arī par polinomu virs S: $f \in S[X]$.

2.1. piemērs. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \implies \mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$.

2.2. teorēma. *R, S - unitāri IG, $R \leq S$, $S[X]$ - VFG. $f \in R[X]$. Doti f sadalījumi nedalāmu polinomu reizinājumos virs R un S:*

$$\begin{cases} f = r_1 ... r_n, \text{ virs } R \\ f = s_1 ... s_m, \text{ virs } S. \end{cases}$$

Tad

$$\forall\ r_i = u s_{i_1} ... q_{i_l}, \text{ kur } s_{i_j} \in \{s_1, ..., s_m\}, u \in \mathcal{U}(S)$$

(katrs f nedalāms dalītājs virs R sadalās tādā reizinājumā virs S, kura elementi ir asociēti ar f nedalāmiem dalītājiem virs S).

PIERĀDĪJUMS $\left\{\begin{array}{l} r \in \mathcal{I}(R[X]), r \Big| f \\ s \in \mathcal{I}(S[X]), s \Big| r \end{array}\right. \Longrightarrow s \Big| f \Longrightarrow s \in \{s_1, ..., s_m\}.$

■

2.2. piemērs. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $f = X^2 - 2 \in \mathcal{I}(\mathbb{Q}[X])$, bet
$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \in \mathbb{R}[X]$.

2.3. Koeficientu LKD atdalīšana

Vienkāršākā ar polinomu faktorizāciju saistītā darbība ir koeficientu kopīgo dalītāju atdalīšana izmantojot distributīvo īpašību - *koeficientu kopīgo reizinātāju iznešana*.

$$\left\{\begin{array}{l} f = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i X^i \\ \exists\ a :\ \forall\ i\ a \Big| f_i \end{array}\right. \Longrightarrow f = a \sum_{i=0}^{n} q_i X^i, \text{ kur } q_i = \frac{a_i}{a}.$$

Ja gredzenā R eksistē LKD, tad par $f(X) \in R[X]$ *saturu* sauc tā koeficientu LKD, to apzīmēsim ar $cont(f)$.

Ja $cont(f) \in \mathcal{U}(R)$, tad f sauc par *primitīvu polinomu*.

2.3. piemērs. Normalizēts polinoms ir primitīvs polinoms. Visi polinomi ar koeficientiem laukā ir primitīvi.

$\forall\ f \in R[X]$ var izteikt formā

$$f = cont(f) f_0, \text{ kur } f_0 \text{ ir primitīvs polinoms.}$$

2.4. piemērs. $f = 2X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$, $cont(f) \sim 2$, $f = 2\underbrace{(X+2)}_{=f_0}$.

2.4. Lineārie polinomi un polinomu saknes

2.4.1. Vienkāršās saknes - Bezout teorēma

Saka, ka $a \in R$ ir $f \in R[X]$, $\deg(f) \geq 1$, *sakne*, ja $f(a) = 0$.

$f \in R[X]$ sakņu kopu apzīmē ar $\mathcal{V}(f)$.

2.3. teorēma. R - IG, $f, g \in R[X]$.

1. $\mathcal{V}(fg) = \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$.
2. $g \big| f \implies \mathcal{V}(g) \subseteq \mathcal{V}(f)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\underline{\mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g) \overset{?}{\subseteq} \mathcal{V}(fg).}$

$a \in \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g) \implies a \in \mathcal{V}(f) \ \vee \ a \in \mathcal{V}(g) \implies f(a) = 0 \vee g(a) = 0 \implies f(a)g(a) = 0 \implies (fg)(a) = 0 \implies a \in \mathcal{V}(fg)$.

$\underline{\mathcal{V}(fg) \overset{?}{\subseteq} \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).}$

$(fg)(a) = f(a)g(a) = 0 \implies f(a) = 0 \vee g(a) = 0$, jo R - IG.
$\implies a \in \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$.

2. $g \Big| f \implies f(X) = q(X)g(X)$.

$a \in \mathcal{V}(g) \implies g(a) = 0 \implies f(a) = q(a)g(a) = 0 \implies a \in \mathcal{V}(f)$.
■

2.4. teorēma. (*Bezout*) $f \in k[X]$.

$$a \in \mathcal{V}(f) \iff (X - a)\Big| f(X).$$

PIERĀDĪJUMS Izdalīsim $f(X)$ ar $X - a$:

$$f(X) = q(X)(X - a) + r(X), \text{ kur } \deg\Big(r(X)\Big) < \deg(X - a) = 1$$

$\implies r(X) = r_0$ - konstants polinoms.

Atradīsim r_0. Veicot substitūciju $X = a$, iegūstam
$f(a) = q(a)(a - a) + r_0 \implies r_0 = f(a) \implies$

$$f(X) = q(X)(X - a) + f(a).$$

$$f(a) = 0 \iff f(X) = q(X)(X-a) \iff (X-a)\Big| f(X). \quad \blacksquare$$

2.1. piezīme. No Bezout teorēmas seko, ka kvadrātisks vai kubisks polinoms $f \in k[X]$ ir nedalāms $\iff \mathcal{V}(f) = \varnothing$.

2.4.2. Vairākkārtīgās saknes

Saka, ka $a \in R$ ir $f \in R[X]$, $\deg(f) \geq 1$, *m-kārtīga sakne*, ja

$$(X-a)^m \Big| f(X) \text{ un } (X-a)^{m+1} \nmid f(X).$$

Citiem vārdiem sakot

$$f(X) = (X-a)^m g(X), \text{ kur } LKD\Big(g(X), X-a\Big) = 1.$$

$f \in R[X]$ m-kārtīgu sakņu kopu apzīmē ar $\mathcal{V}^m$.

a sauc par f *vairākkārtīgu sakni*, ja $a \in \mathcal{V}^m(f)$, kur $m \geq 2$.

2.5. piemērs. $a = 1$ ir 2-kārtīga sakne polinomam $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \in \mathbb{Z}[X]$.

2.5. teorēma. R - IG, $R[X]$ - VFG. $f \in R[X]$, $a_1, ..., a_l$ - dažādi R elementi: $a_i \in \mathcal{V}^{m_i}(f)$. Tad

$$f(X) = (X - a_1)^{m_1} ... (X - a_l)^{m_l} g(X), \text{ kur } g(a_i) \neq 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq l.$$

PIERĀDĪJUMS Seko no viennozīmīgās faktorizācijas īpašības. ■

2.2. piezīme. Nekonstanta polinoma sakņu kārtu summa nevar pārsniegt polinoma pakāpi.

2.5. Bezout teorēmas pielietojums - polinomu interpolācija

2.5.1. Pamatteorēma

2.6. teorēma. $f, g \in R[X]$, $\deg f \leq n$, $\deg g \leq n$, $\{a_1, ..., a_{n+1}\} \subseteq R$, $a_i \neq a_j \ \forall \ i \neq j$.

$$\Big(\forall \ i : \ f(a_i) = g(a_i)\Big) \implies f = g.$$

(ja divi polinomi f un g ar pakāpi $\leq n$ pieņem vienādas vērtības pēc $n+1$ substitūcijas ar dažādiem elementiem $a_1, ..., a_{n+1}$, tad tie ir vienādi).

PIERĀDĪJUMS Definēsim $h = f - g$, tad

$$\deg(h) \leq \max\Big(\deg(f), \deg(g)\Big) = n.$$

Pēc pieņēmuma

$$h(a_1) = f(a_1) - g(a_1) = 0, ...,$$

$$..., h(a_{n+1}) = f(a_{n+1}) - g(a_{n+1}) = 0,$$

tātad polinomam h ir vismaz $n+1$ dažādas saknes $a_1, ..., a_{n+1}$ - pretruna, ja h nav vienāds ar 0. ■

2.3. piezīme. Polinomu ar pakāpi n var viennozīmīgi noteikt (atrast tā koeficientus), ja ir zināmas tā vērtības $n+1$ punktos.

2.5.2. Lagranža interpolācijas formula

2.7. teorēma. (*Lagranža interpolācijas formula*) k - lauks. Ja ir doti $n+1$ dažādi k elementi $a_0, ..., a_n$ un $n+1$ k elementi $b_0, ..., b_n$, tad $\exists$ tieši viens $f(X) \in k[X]$, $\deg f \leq n$:

$$f(a_i) = b_i \text{ visiem } 0 \leq i \leq n.$$

Polinoms f var tikt atrasts pēc šādas formulas:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{(X - a_0)...(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})...(X - a_n)}{(a_i - a_0)...(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})...(a_i - a_n)} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

PIERĀDĪJUMS

Vienīgums.

Seko no iepriekšējas teorēmas.

Eksistence.

Jāveic formulas tieša pārbaude. ■

2.6. piemērs. Atradīsim $f \in \mathbb{F}_5[X]$, $\deg(f) = 2$:

$$\begin{cases} f(1) = 2, \\ f(2) = 1, \\ f(3) = 3. \end{cases}$$

Saskaņā ar Lagranža interpolācijas formulu

$$f(X) = 2\frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} + 1\frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} + 3\frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} =$$

$$= (X-2)(X-3) - (X-1)(X-3) - (X-1)(X-2) =$$

$$= -X^2 + 2X + 1 = 4X^2 + 2X + 1.$$

3. 3.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Pierādīt, ka virs galīga lauka nedalāmo polinomu pakāpes nav ierobežotas (eksistē patvaļīgi augstu pakāpju nedalāmi polinomi).

3.2 Sadaliet doto polinomu nedalāmos reizinātājos virs dotā lauka:
(a) $f(X) = X^6 + 27$, virs $\mathbb{Q}$, virs $\mathbb{R}$,
(b) $f(X) = X^5 - X$, virs $\mathbb{F}_5$.

3.3 Atrodiet visus nedalāmos polinomus
(a) ar pakāpi 2 virs $\mathbb{F}_3$,
(b) ar pakāpi 3 virs $\mathbb{F}_2$.

3.4 Pierādiet, ka polinomam

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{F}_2[X]$$

eksistē lineārs dalītājs tad un tikai tad, ja

$$a_0 = 0 \text{ vai } \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1.$$

3.5 Nosakiet saknes a kārtu dotajā polinomā f:

(a) $f(X) = X^4 - X^3 - X + 1$, $a = 1$, virs $\mathbb{Q}$,

(b) $f(X) = X^3 + X + 1$, $a = 1$, virs $\mathbb{F}_3$.

3.6 (*Lagranža interpolācijas formula*) Atrast minimālas pakāpes polinomus pēc to vērtībām dotajos punktos.

(a) $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$, $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 2$;

(b) $f(x) \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.7 Atrast IG, kas nav GFG.

3.8 Izpētiet, kādos gadījumos polinoms $f \in \mathbb{F}_p[X]$ atbilst injektīvai funkcijai $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$, un kādos - neinjektīvai. Kāda ir saistība starp funkcijas grafa struktūru un polinoma struktūru?

3.9 Pamatot *Ņūtona interpolācijas formulu.* k - lauks. Ja ir doti $n+1$ dažādi k elementi $a_0, ..., a_n$ un $n+1$ k elementi $b_0, ..., b_n$, tad $f(X) \in k[X]$, kas apmierina nosacījumus

$$f(a_i) = b_i \text{ visiem } 0 \leq i \leq n,$$

var tikt meklēts formā

$$f(X) = c_0 + c_1(X - a_0) + c_2(X - a_0)(X - a_1) + ...$$

$$+c_n(X - a_0)...(X - a_{n-1}) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{i}(X - a_{j-1}).$$

Mēğiniet atrast c_k kā funkciju no a_i un b_i, $0 \leq i \leq n$.