DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis - apgūt pamatfaktus par polinomu faktorizāciju virs $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt komplekso skaitļu lauku $\mathbb{C}$, kas ir $\mathbb{R}$ paplašinājums,
- polinomi virs $\mathbb{C}$ faktorizējas lineāros polinomos,
- polinomi virs $\mathbb{R}$ faktorizējas lineāros un kvadrātiskos polinomos,

- pastāv formulas, ar kuru palīdzību var atrisināt 2. un 3. pakāpes vienādojumus.

Svarīgākie jēdzieni: kompleksie skaitļi, kompleksā plakne, kompleksa skaitļa modulis un arguments, kompleksi saistītais skaitlis, kompleksi saistītais polinoms, kompleksā skaitļa trigonometriskā un eksponenciālā forma.

Svarīgākie fakti un metodes: komplekso skaitļu īpašības, kompleksa skaitļa n-tās kārtas saknes aprēķināšanas formula, $\mathbb{C}$ algebriskais slēgtums, faktorizācija virs $\mathbb{C}$, faktorizācija virs $\mathbb{R}$, Kardāno formulas.

1. Pamatfakti par $\mathbb{C}$

1.1. Motivācijas

1.1.1. Algebra

Algebriskā motivācija - gredzenā $\mathbb{R}$ nevar atrisināt pat tādu vienkāršu algebrisku vienādojumu kā

$$x^2 + 1 = 0,$$

tāpēc ir vēlams paplašināt gredzenu $\mathbb{R}$ līdz kādam lielākam gredzenam, kurā šādi vienādojumi būtu atrisināmi.

1.1.2. Ģeometrija

Ģeometriskā motivācija - $\mathbb{R}$ atbilst taisnes punktiem, bet taisne atrodas plaknē, tāpēc vēlams paplašināt $\mathbb{R}$ tā, lai lielākā gredzena elementi atbilstu plaknes punktiem.

Izrādās, ka abas motivācijas var apmierināt vienlaicīgi un saskaņoti.

1.2. Paplašinājuma modeļi

1.2.1. 1.modelis - komplekso skaitļu plakne

Apskatīsim plakni ar Dekarta koordinātu sistēmu. Tā kā katram plaknes punktam var savstarpēji viennozīmīgi piekārtot tā Dekarta koordinātes - reālu skaitļu pāri, tad plakne identificēt ar $\mathbb{R}$ Dekarta kvadrātu

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definēsim divas bināras operācijas kopā $\mathbb{R}^2$ šādā veidā:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (vektoru saskaitīšana),
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (kaut kas jauns).

Var pārbaudīt, ka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ir lauks, kurā 0 ir elements $(0, 0)$ un 1 ir elements $(1, 0)$. Šo lauku apzīmē ar $\mathbb{C}$ un sauc par *komplekso skaitļu lauku*.

Elementi formā $(x, 0)$ veido apakšgredzenu, kas ir izomorfs ar $\mathbb{R}$. Elementu $(x, 0)$ identificēsim ar x. Tādējādi $\mathbb{C}$ var uzskatīt par $\mathbb{R}$

paplašinājumu, kas apmierina ģeometrisko motivāciju - $\mathbb{R} < \mathbb{C}$.

Var redzēt, ka elements $i = (0, 1)$ apmierina vienādojumu

$$x^2 + 1 = 0.$$

Redzam, ka

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

šo pierakstu parasti arī izmanto.

1.2.2. 2.modelis - antisimetriskās matricas

Apzīmēsim ar $\mathcal{C}$ reālo 2×2 matricu kopu, kuras elementi ir formā

$$\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline -b & a \end{array}\right]$$

Matricām ir definēta saskaitīšana un reizināšana.

Var pārbaudīt, ka $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ir lauks, kurā

- 0 ir $\mathbf{O} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$,
- 1 ir vienības matrica $\mathbf{E}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$.

$\mathcal{C}$ satur apakšgredzenu $\mathcal{R}$, kura elementi ir matricas formā

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right].$$

$\mathcal{R} \simeq \mathbb{R}$ (gredzenu izomorfisms), tādējādi var uzskatīt, ka $\mathcal{C}$ ir $\mathbb{R}$ paplašinājums.

Ievērosim, ka matrica

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right]$$

apmierina matricu vienādojumu

$$\mathbf{I}^2 + \mathbf{E}_2 = 0.$$

Tādējādi $\mathcal{C}$ var interpretēt kā $\mathbb{R}$ paplašinājumu, kas apmierina vienu no motivācijām.

1.3. Pamatfakti

1.3.1. Aritmētiskās operācijas

Komplekso skaitļu operācijas ir definētas sādā veidā:

- $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_1) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$,
- $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,
- $$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ja $z = x + iy$, tad $x = \mathcal{R}e(z)$, $y = \mathcal{I}m(z)$, $\bar{z} = x - iy$ (*kompleksi saistītais skaitlis*). Redzam, ka $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$. Redzam, ka $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Komplekso skaitļu kopā nav dabiska reālo skaitļu salīdzināšanas $\leq$ (pilna sakārtojuma) analoga.

1.3.2. Polārie parametri un trigonometriskā forma

Par $z = x + iy$ *moduli* sauc lielumu $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Par $z = x + iy$ *argumentu* $\arg(z)$ sauc saistītās polārās sistēmas koordināti φ, kas apmierina sakarības

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Redzam, ka

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(kompleksā skaitļa *trigonometriskā forma*).

Redzam, ka $\arg(z)$ ir noteikts ar precizitāti līdz 2π daudzkārtnim.

1.3.3. Īpašības

$f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^n$, definēsim *kompleksi saistīto polinomu*

$$\overline{f}(X) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i X^n.$$

1.1. piemērs. $f(X) = iX + 1 \implies \overline{f}(X) = -iX + 1.$

1.1. teorēma. Kompleksajiem skaitļiem izpildās šādas īpašības:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$,
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ un $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (kompleksā saistīšana ir gredzenu homomorfisms),
5. $\forall\ f \in \mathbb{C}[X]:\ \overline{f(z)} = \overline{f}(\overline{z})$.

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude. ■

1.1. piezīme. No teorēmas seko *Muavra formula*:

$$\Big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

1.2. piezīme. No teorēmas seko n-tās kārtas saknes aprēķināšanas formula:

$$\begin{cases} z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \\ w^n = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\cdot\psi = \varphi. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi l}{n}. \end{cases}$$

Dažādas ψ vērtības iegūsim, ja l vietā liksim visu atlikumu klašu mod n pārstāvjus, piemēram, kopas $\{0, ..., n-1\}$ elementus.

Apkopojot iegūstam šādu rezultātu:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos(\frac{\varphi+2\pi l}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2\pi l}{n})\Big),\ \text{kur } l \in \{0, ..., n-1\}$$

1.2. piemērs. $\sqrt{i} = \sqrt{1}\Big(\cos(\frac{\pi/2+2\pi l}{2}) + i\sin(\frac{\pi/2+2\pi l}{2})\Big),\ \text{kur } l \in \{0, 1\}$

$\Longrightarrow \sqrt{i} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1.3.4. Eksponenciālā forma

Eksponentfunkciju e^x var vispārināt uz $\mathbb{C}$ - definēt funkciju

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = e^z$$

ar šādām īpašībām:

- ja $z \in \mathbb{R}$, tad funkcija sakrīt ar klasisko eksponentfunkciju,
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,
- $e^{z_1 z_2} = (e^{z_1})^{z_2}$.

Var pierādīt *Eilera formulu*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ kur } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Kompleksos skaitļus var uzdot *eksponenciālajā formā*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

1.3. piemērs. $-1 = e^{i\pi}$.

1.4. $\mathbb{C}$ algebriskais slēgtums

Lauku k sauksim par *algebriski slēgtu*, ja $\forall\ f \in k[X]$, $\deg f \geq 1$: $\mathcal{V}(f) \neq \emptyset$.

Citas ekvivalentas definīcijas:

- tikai lineārie polinomi ir nedalāmi gredzenā $k[X]$;
- $\forall\ f \in k[X]$ sadalās lineāros reizinātājos;
- $\forall\ f \in k[X]$ sakņu multiplicitāšu skaits ir vienāds ar $\deg f$.

1.4. piemērs. $\mathbb{R}$ nav algebriski slēgts, jo polinoms X^2+1 ir nedalāms. $\forall\ p \in \mathbb{P}$ lauks $\mathbb{F}_p$ nav algebriski slēgts.

1.2. teorēma. (*algebras pamatteorēma*) $\mathbb{C}$ ir algebriski slēgts lauks.

PIERĀDĪJUMS Aprakstīsim tikai pierādījuma galvenos soļus un palīgrezultātus.

Palīgrezultāti no matemātiskās analīzes.

A Ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir polinomiāla funkcija, tad f ir nepārtraukta.

B Ja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta funkcija, tad tā pieņem savu minimālo vērtību katrā ierobežotā slēgtā $\mathbb{C}$ apakškopā.

C Ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir polinomiāla funkcija, tad $\exists\ r \in \mathbb{R}$ tāds, ka

$$|f(z)| > |f(0)|\ \forall\ z : |z| > r.$$

D Ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir polinomiāla funkcija, tad $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, kurā $|f(z)|$ pieņem savu minimālo vērtību.

E Ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir nekonstanta polinomiāla funkcija un $|f(u)| \neq 0$, tad $\exists\ t \in \mathbb{C}$ tāds, ka

$$|f(t)| < |f(u)|.$$

Pierādījuma kopsavilkums.

$f \in \mathbb{C}[X]$. Saskaņā ar palīgrezultātu **D** $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$, kurā $|f(z)|$ pieņem minimālo vērtību:

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ visiem } z \in \mathbb{C}.$$

Ja $|f(z_0)| \neq 0$, tad saskaņā ar palīgrezultātu **E** $\exists w_0 \in \mathbb{C}$ tāds, ka

$$|f(w_0)| < |f(z_0)| - \text{pretruna.}\blacksquare$$

2. Polinomu faktorizācija virs $\mathbb{C}$ un $\mathbb{R}$

2.1. Faktorizācija virs $\mathbb{C}$

2.1. piezīme. (*algebras pamatteorēma*) Tā kā $\mathbb{C}$ ir algebriski slēgts lauks, tad katrs $f \in \mathbb{C}[X]$ sadalās lineāros reizinātājos.

2.1. piemērs. Sadalīt reizinātājos polinomu $X^3 - 1$.

2.2. Faktorizācija virs $\mathbb{R}$

Izmantosim agrāk pierādītu faktu, ka $\forall$ nedalāms polinoms virs $\mathbb{R}$ dalās nedalāmos polinomos virs $\mathbb{C}$ (kas var būt tikai lineāri).

2.1. teorēma. $\mathbb{R}[X]$ nedalāma elementa pakāpe nepārsniedz 2.

PIERĀDĪJUMS
Pieņemsim, ka $f \in \mathbb{R}[X]$ ir sadalīts lineāros reizinātājos virs $\mathbb{C}$:

$$f(X) = u(X - z_1)...(X - z_n).$$

$$z \in \mathcal{V}(f) \implies \begin{cases} f(z) = 0 \\ \overline{f(z)} = \overline{0} = 0. \end{cases}$$

$f \in \mathbb{R}[X] \implies \overline{f} = f \implies \overline{f(z)} = \overline{f}(\overline{z}) = f(\overline{z}) = 0 \implies$
$\implies \overline{z} \in \mathcal{V}(f).$

Tādējādi, $z \in \mathcal{V}(f) \implies \{z, \overline{z}\} \subseteq \mathcal{V}(f).$

Esam ieguvuši šādu $\mathcal{V}(f)$:

$$\mathcal{V}(f) = \{ \underbrace{a_1, ..., a_k}_{\text{reālās saknes}}, \underbrace{z_1, \overline{z_1}, ..., z_l, \overline{z_l}}_{\text{kompleksās saknes}} \}$$

Seko, ka f faktorizējas virs $\mathbb{C}$ šādā veidā:

$$f(X) = u \underbrace{(X - a_1)...(X - a_k)}_{\text{reālās saknes}} \cdot \underbrace{(X - z_1)(X - \overline{z_1})...(X - z_l)(X - \overline{z_l})}_{\text{kompleksās saknes pa pāriem}}.$$

Mēģināsim apvienot kompleksos lineāros reizinātājus tā, lai iegūtu polinomus ar reāliem koeficientiem. Ievērosim, ka

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} = X^2 + pX + q \in \mathcal{I}(\mathbb{R}[X]),$$

jo tam nav reālu sakņu (ja būtu reālas saknes, tas būtu pretrunā ar to $\mathbb{C}[X]$ ir VFG).

Apvienojot visus kompleksi saistītos pārus, iegūsim $f \in \mathbb{R}[X]$ sadalījumu nedalāmos reizinātājos, kas ir noteikts viennozīmīgi:

$$f(X) = (X - a_1)^{\alpha_1}...(X - a_k)^{\alpha_k}(X^2 + p_1X + q_1)^{\beta_1}...(X^2 + p_lX + q_l)^{\beta_l}.$$

Tā kā f bija patvaļīgs, tad secinām, ka nedalāmi polinomi gredzenā $\mathbb{R}[X]$ var būt ar pakāpi 0, 1 vai 2. ■

2.2. piemērs. Sadalīt nedalāmos reizinātājos $X^6 - 1$ virs $\mathbb{R}$:

$$X^6 - 1 = (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)\underbrace{(X^4 + X^2 + 1)}_{\text{grūti}} =$$

$$(X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

2.3. Precīzās formulas polinomu saknēm, kuru pakāpe nepārsniedz 3

2.3.1. $\deg(f) = 2$

Dots polinoms $f(X) = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Risināsim vienādojumu

$$X^2 + aX + b = 0.$$

1.solis - lineārā substitūcija.

Veiksim substitūciju

$$X \to Y = X + u$$

un pārveidosim vienādojumu:

$$(Y-u)^2 + a(Y-u) + b = \\ Y^2 + (-2u + a)Y + (u^2 - au + b) = 0$$

Redzam, ka ņemot $u = \frac{a}{2}$, iegūsim vienādojumu formā

$$Y^2 + p = 0.$$

2.solis - kvadrātsaknes atrašana un pāreja uz sākotnējo nezināmo.

Redzam, ka $Y = \sqrt{-p}$. Ja tiek fiksēta kāda konkrēta $\sqrt{-p}$ vērtība, tad ir divas saknes: $\sqrt{-p}$ un $-\sqrt{-p}$.

Atrodam X pēc formulas $X = Y - \frac{a}{2}$.

2.3.2. $\deg(f) = 3$ (del Ferro-Tartaglia-Cardano formulas)

$f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Risināsim vienādojumu

$$f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c = 0.$$

1.solis - lineārā substitūcija.
Veiksim substitūciju

$$X \to Y = X + u$$

un pārveidosim vienādojumu:

$$(Y-u)^3 + a(Y-u)^2 + b(Y-u) + c =$$
$$Y^3 + (-3u + a)Y^2 + (3u^2 - 2au + b)Y + (-u^3 + au^2 - bu + c) = 0$$

Redzam, ka ņemot $u = \frac{a}{3}$, iegūsim vienādojumu formā

$$Y^3 + pY + q = 0.$$

2.solis - brīva parametra ieviešana.
Meklēsim Y formā

$$Y = \alpha + \beta,$$

ievietosim vienādojumā un iegūsim

$$(\alpha+\beta)^3 + p(\alpha+\beta) + q = (\alpha+\beta)(3\alpha\beta+p) + (\alpha^3+\beta^3+q) = 0.$$

3.solis - brīvības izmantošana redukcijai uz kvadrātvienādojumu.

Izmantojot brīvību, kas radās ieviešot vienu brīvības pakāpi, varam pieprasīt, ka izpildās sakarība starp α un β - vienādība

$$3\alpha\beta + p = 0.$$

Attiecībā uz α un β iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} \alpha\beta = -\frac{p}{3} \\ \alpha^3+\beta^3 = -q. \end{cases}$$

vai sekojošu sistēmu (ar, iespējams, lielāku atrisinājumu kopu)

$$\begin{cases} \alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27} \\ \alpha^3+\beta^3 = -q. \end{cases}$$

4.solis - sākotnējo nezināmo atrašana.

Atrisināsim sistēmu attiecībā uz α un β:

$$\begin{cases} \alpha^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \\ \beta^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}}{2}. \end{cases}$$

Redzam, ka

$$Y = \alpha + \beta = \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}.$$

Kuba saknes ir jāizvēlas tā, lai izpildītos nosacījums

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

Kompleksajiem skaitļiem eksistē trīs kuba saknes, tā ka šķiet, ka vajadzētu rasties 9 saknēm, jo katru no α un β var izvēlēties 3 veidos. Īstenībā ir tikai 3 atrisinājumi.

3. 4.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Izmantojot kvadrātbrīvās faktorizācijas metodi sadaliet nedalāmajos reizinātājos polinomus:

(a) $X^5 + X^4 - 5X^3 - X^2 + 8X - 4$, virs $\mathbb{Q}$;

(b) $X^7 - 5X^6 + 12X^5 - 18X^4 + 18X^3 - 12X^2 + 5X - 1$, virs $\mathbb{Q}$;

4.2 Attēlojiet kompleksajā z-plaknē apgabalu, kas apmierina nosacījumu

$$|z - i| < 1.$$

4.3 Atrisiniet kompleksajos skaitļos vienādojumu

$$z^4 + 4 = 0.$$

4.4 Sadaliet nedalāmajos reizinātājos polinomu $X^8 - 1$ virs $\mathbb{C}$ un virs $\mathbb{R}$.

4.5 Izmantojot Kardano formulas atrisiniet kompleksos skaitļos vienādojumu

$$X^3 + 12X^2 + 45X + 50 = 0.$$

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Atrodiet $LKD(X^m + 1, X^n + 1)$ virs $\mathbb{C}$, kur $m, n \in \mathbb{N}$.