*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Polinomu algebra

## 3.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2009./2010.studiju gads*

# Saturs

**Lekcijas mērķis** - apgūt pamatfaktus par polinomu faktorizāciju, polinomu sadalīšanu lināros faktoros, atvasinājuma izmantošanu polinomu faktorizācijā.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- eksistē bezgalīgi daudz nedalāmu normalizētu poliomu ar lauka koeficientiem, var gadīties, ka to pakāpes nav ierobežotas;
- katrai polinoma $f$ saknei atbilst viens $f$ lineārs dalītājs, un otrādi;
- $n$-tās pakāpes polinoms ir viennozīmīgi noteikts ar tā vērtībām $n+1$ punktos;
- izmantojot polinomu formālo atvasināšanu, var atrast to vairākkārtīgās saknes un kvadrātbrīvo sadalījumu reizinātājos.

**Svarīgākie jēdzieni:** nedalāms polinoms, normalizēts polinoms, polinoma saturs, primitīvs polinoms, polinoma sakne, polinoma $m$-kārtīga sakne, vairākkārtīga sakne, polinoma atvasinājums, polinoma nedalāma dalītāja kārta,

**Svarīgākie fakti un metodes:** nedalāmo polinomu kopas bezgalīgums, teorēma par nedalāmu polinomu faktorizācija virs lielāka gredzena, koeficientu kopīga reizinātāja atdalīšana, polinoma sakņu īpašības, Bezout teorēma, Bezout teorēma vairākkārtīgām saknēm, polinomu vienādības pazīme, Lagranža interpolācijas formula, vairākkārtīgās saknes kritērijs, teorēma par nedalāma dalītāja kārtu attiecībā uz polinoma atvasinājumu, kvadrātbrīvās faktorizācijas formula.

# 1. Polinomu faktorizācija

## 1.1. Pamatfakti

$R[X]$ nedalāmos elementus sauc par *nedalāmiem polinomiem.*

**1.1. piemērs.** $X+1$ - nedalāms virs $\forall$ lauka. $X^2$ - dalāms virs $\forall$ lauka. $X^2+1$ - nedalāms virs $\mathbb{R}$, bet dalāms virs $\mathbb{C}$ un $\mathbb{F}_2$

$f \in k[X]$ sauksim par *normalizētu*, ja tā vecākais koeficients ir vienāds ar 1. Katrai asociācijas klasei ir tieši viens normalizēts pārstāvis.

**1.2. piemērs.** $\mathbb{C}[X]$, $X-1 \sim 2(X-1) \sim i(X-1) \sim c(X-1)$.

### 1.1.1. Nedalāmo polinomu skaits

**1.1. teorēma.** $k$ - lauks. $k[X]$ satur bezgalīgi daudz nedalāmu normalizētu polinomu.

PIERĀDĪJUMS

**1.apakšgadījums**. $|k| = \infty \implies$ visi lineārie polinomi $X - a$, $a \in k$, veido nedalāmu normalizētu polinomu kopu.

**2.apakšgadījums**. Ja $|k| < \infty$, tad pierādījums ir līdzīgs pirmskaitļu kopas bezgalīguma pierādījumam.

Pieņemsim pretējo: eksistē tikai galīgs skaits nedalāmu normalizētu polinomu $p_1, ..., p_k$. Apskatīsim polinomu

$$f = p_1 ... p_k + 1.$$

$\deg(f) > 0 \implies \exists$ nedalāms $f$ dalītājs $\sim p_l$.

$p_l \in \{p_1, ..., p_k\} \implies p_l | f - p_1 ... p_k \implies p_l | 1 \implies p_l$ - invertējams polinoms - pretruna. ■

**1.2. teorēma.** $k$ - lauks, $|k| < \infty$. $k[X]$ nedalāmu polinomu pakāpes nav ierobežotas.

PIERĀDĪJUMS $k$ ir galīgs lauks $\Longrightarrow$ $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists$ galīgs skaits polinomu, kuru pakāpe ir vienāda ar $n$. Tā kā nedalāmu polinomu kopa ir bezgalīga, tad to pakāpes nevar būt ierobežotas. ■

### 1.1.2. Gredzenu iekļaušana un polinomu faktorizācija

$R, S$ - unitāri IG, $R \leq S$. $f \in R[X]$ var uzskatīt arī par polinomu virs $S$: $f \in S[X]$.

**1.3. piemērs.** $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$.

**1.3. teorēma.** $R, S$ - unitāri IG, $R \leq S$, $S[X]$ - VFG. $f \in R[X]$. Doti $f$ sadalījumi nedalāmu polinomu reizinājumos virs $R$ un $S$:

$$\begin{cases} f = r_1 ... r_n, & \text{virs } R \\ f = s_1 ... s_m, & \text{virs } S. \end{cases}$$

Tad

$$\forall\ r_i = u q_1 ... q_l,\ \text{kur } q_j \in \{s_1, ..., s_m\}, u \in \mathcal{U}(S)$$

(katrs $f$ nedalāms dalītājs virs $R$ sadalās tādā reizinājumā virs $S$, kura elementi ir asociēti ar $f$ nedalāmiem dalītājiem virs $S$).

PIERĀDĪJUMS $\begin{cases} r \in \mathcal{I}(R[X]), r|f \\ s \in \mathcal{I}(S[X]), s|r \end{cases} \Longrightarrow s|f \Longrightarrow s \in \{s_1, ..., s_m\}.$

■

**1.4. piemērs.** $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $f = X^2 - 2 \in \mathcal{I}(\mathbb{Q}[X])$, bet
$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) \in \mathbb{R}[X]$.

## 1.2. Polinoma saturs

Vienkāršākā ar polinomu faktorizāciju saistītā darbība ir koeficientu kopīgo dalītāju atdalīšana izmantojot distributīvo īpašību - *koeficientu kopīgo reizinātāju iznešana.*

$$\begin{cases} f = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i \\ \exists\ a :\ \forall\ i\ a|f_i \end{cases} \Longrightarrow f = a \sum_{i=0}^{n} q_i X^i,\ \text{kur } q_i = \frac{a_i}{a}.$$

Ja gredzenā $R$ eksistē $LKD$, tad par $f(X) \in R[X]$ *saturu* sauc tā koeficientu $LKD$, to apzīmēsim ar $cont(f)$.

Tāpat kā $LKD$ un $MKD$, arī $cont(f)$ ir noteikts ar precizitāti līdz asociācijai.

Ja $cont(f) \in \mathcal{U}(R)$, tad $f$ sauc par *primitīvu polinomu*.

**1.5. piemērs.** Normalizēts polinoms ir primitīvs polinoms. Visi polinomi ar koeficientiem laukā ir primitīvi.

$\forall\ f \in R[X]$ var izteikt formā

$$f = cont(f) f_0, \text{ kur } f_0 \text{ ir primitīvs polinoms.}$$

**1.6. piemērs.** $f = 2X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$, $cont(f) \sim 2$, $f = 2\underbrace{(X+2)}_{=f_0}$.

## 1.3. Lineārie polinomi un polinomu saknes

### 1.3.1. Vienkāršās saknes - Bezout teorēma

Saka, ka $a \in R$ ir $f \in R[X]$, $\deg(f) \geq 1$, *sakne*, ja $f(a) = 0$.

$f \in R[X]$ sakņu kopu apzīmē ar $\mathcal{V}(f)$.

**1.4. teorēma.** $R$ - IG, $f, g \in R[X]$.

1. $\mathcal{V}(fg) = \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$.
2. $g|f \implies \mathcal{V}(g) \subseteq \mathcal{V}(f)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\underline{\mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g) \overset{?}{\subseteq} \mathcal{V}(fg).}$

$a \in \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g) \implies a \in \mathcal{V}(f) \;\vee\; a \in \mathcal{V}(g) \implies f(a) = 0 \vee g(a) = 0 \implies f(a)g(a) = 0 \implies (fg)(a) = 0 \implies a \in \mathcal{V}(fg)$.

$\underline{\mathcal{V}(fg) \overset{?}{\subseteq} \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g).}$

$(fg)(a) = f(a)g(a) = 0 \implies f(a) = 0 \vee g(a) = 0$, jo $R$ - IG.
$\implies a \in \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$.

2. $g|f \implies f(X) = q(X)g(X)$.

$a \in \mathcal{V}(g) \implies g(a) = 0 \implies f(a) = q(a)g(a) = 0 \implies a \in \mathcal{V}(f)$.
■

**1.5. teorēma.** *(Bezout)* $a \in \mathcal{V}(f) \iff (X-a)|f(X)$.

PIERĀDĪJUMS Izdalīsim $f(X)$ ar $X - a$:

$$f(X) = q(X)(X-a) + r(X),\ \text{kur}\ \deg\Big(r(X)\Big) < \deg(X-a) = 1$$

$\implies r(X) = r_0$ - konstants polinoms.

Atradīsim $r_0$. Veicot substitūciju $X = a$, iegūstam
$f(a) = q(a)(a-a) + r_0 \implies r_0 = f(a) \implies$
$f(X) = q(X)(X-a) + f(a)$.

$f(a) = 0 \iff f(X) = q(X)(X-a) \iff (X-a)|f(X)$. ■

**1.1. piezīme.** No Bezout teorēmas seko, ka kvadrātisks vai kubisks polinoms $f \in k[X]$ ir nedalāms $\iff \mathcal{V}(f) = \emptyset$.

### 1.3.2. Vairākkārtīgās saknes

Saka, ka $a \in R$ ir $f \in R[X]$, $\deg(f) \geq 1$, *$m$-kārtīga sakne*, ja

$$(X-a)^m | f(X) \text{ un } (X-a)^{m+1} \nmid f(X).$$

Citiem vārdiem sakot

$$f(X) = (X-a)^m g(X), \text{ kur } LKD\Big(g(X), X-a\Big) = 1.$$

$f \in R[X]$ $m$-kārtīgu sakņu kopu apzīmē ar $\mathcal{V}^m$.

$a$ sauc par $f$ *vairākkārtīgu sakni*, ja $a \in \mathcal{V}^m(f)$, kur $m \geq 2$.

**1.7. piemērs.** $a = 1$ ir 2-kārtīga sakne polinomam $X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

**1.6. teorēma.** (polinomu vienādības pazīme) $R$ - IG, $R[X]$ - VFG. $f \in R[X]$, $a_1, ..., a_l$ - dažādi $R$ elementi: $a_i \in \mathcal{V}^{m_i}(f)$. Tad

$$f(X) = (X - a_1)^{m_1} ... (X - a_l)^{m_l} g(X), \text{ kur } g(a_i) \neq 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq l.$$

PIERĀDĪJUMS Seko no viennozīmīgās faktorizācijas īpašības. ■

**1.2. piezīme.** Nekonstanta polinoma sakņu kārtu summa nevar pārsniegt polinoma pakāpi.

### 1.3.3. Polinomu interpolācija

**1.7. teorēma.** $f, g \in R[X]$, deg $f =$ deg $g = n$, $\{a_1, ..., a_{n+1}\} \subseteq R$, $a_i \neq a_j \ \forall \ i \neq j$.

$$\forall \ i : \ f(a_i) = g(a_i) \implies f = g.$$

(ja divi polinomi $f$ un $g$ ar pakāpi $n$ pieņem vienādas vērtības pēc $n+1$ substitūcijas ar dažādiem elementiem $a_1, ..., a_{n+1}$, tad tie ir vienādi).

PIERĀDĪJUMS Definēsim $h = f - g$, tad

$$\deg(h) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) = n.$$

Pēc pieņēmuma

$$h(a_1) = f(a_1) - g(a_1) = 0, ...,$$

$$..., h(a_{n+1}) = f(a_{n+1}) - g(a_{n+1}) = 0,$$

tātad polinomam $h$ ir vismaz $n+1$ dažādas saknes $a_1, ..., a_{n+1}$ - pretruna, ja $h$ nav vienāds ar 0. ■

**1.3. piezīme.** Polinomu ar pakāpi $n$ var viennozīmīgi noteikt (atrast tā koeficientus), ja ir zināmas tā vērtības $n+1$ punktos.

**1.8. teorēma.** (*Lagranža interpolācijas formula*) $k$ - lauks. Ja ir doti $n+1$ dažādi $k$ elementi $a_0, ..., a_n$ un $n+1$ $k$ elementi $b_0, ..., b_n$, tad $\exists$ tieši viens $f(X) \in k[X]$, $\deg f \leq n$:

$$f(a_i) = b_i \text{ visiem } 0 \leq i \leq n.$$

Polinoms $f$ var tikt atrasts pēc šādas formulas:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{(X - a_0)...(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})...(X - a_n)}{(a_i - a_0)...(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})...(a_i - a_n)} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

PIERĀDĪJUMS

**Vienīgums.**

Seko no iepriekšējas teorēmas.

**Eksistence.**

Jāveic formulas tieša pārbaude. ■

**1.8. piemērs.** Atradīsim $f \in \mathbb{F}_5[X]$, $\deg(f) = 2$:

$$\begin{cases} f(1) = 2, \\ f(2) = 1, \\ f(3) = 3. \end{cases}$$

Saskaņā ar Lagranža interpolācijas formulu

$$f(X) = 2\frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} + 1\frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} + 3\frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} =$$
$$= (X-2)(X-3) - (X-1)(X-3) - (X-1)(X-2) =$$
$$= -X^2 + 2X + 1 = 4X^2 + 2X + 1.$$

## 1.4. Polinomu atvasināšana un tās pielietojumi faktorizācijā

### 1.4.1. Pamatfakti

Par polinoma $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ *(formālo) atvasinājumu* sauc polinomu

$$f'(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1} \in R[X].$$

Atvasinājumu var apzīmēt arī šādi: $f'(X) = (Df)(X)$.

Atvasinājumu īpašības un atvasināšanas metodes ir zināmas no matemātiskās analīzes kursa.

Var definēt arī augstāku kārtu atvasinājumus.

**1.9. piemērs.** $(X^n)' = nX^{n-1}$, $(a_0 + a_1 X)' = a_1$.

$(X^p)' = 0$ gredzenā $\mathbb{F}_p[X]$.

### 1.4.2. Vairākkārtīgās saknes kritērijs

**1.9. teorēma.** $k$ - lauks, $f \in k[X]$.

$$a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2 \iff \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

PIERĀDĪJUMS
Izdalīsim $f(X)$ ar $(X-a)^2$:

$$f(X) = q(X)(X-a)^2 + r(X), \text{ kur } \deg\Big(r(X)\Big) < 2.$$

$r(X)$ izdalīsim ar $(X-a)$:

$$r(X) = q_1 \cdot (X-a) + r_1,\ \text{kur}\ \deg(r_1) < 1.$$

Apvienojot abus rezultātus vienā vienādībā, iegūsim

$$f(X) = q(X)(X-a)^2 + q_1 \cdot (X-a) + r_1.$$

Atradīsim $f'(X)$:

$$f'(X) = \Big(q(X)(X-a)^2 + q_1 \cdot (X-a) + r_1\Big)' =$$
$$= q'(X)(X-a)^2 + q(X) \cdot 2(X-a) + q_1.$$

$$a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2 \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

$$a \in \mathcal{V}^m(f) \Longrightarrow f(X) = q(X)(X-a)^2 \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ r_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f'(a)=0 \end{array}\right. \stackrel{?}{\Longrightarrow} a \in \mathcal{V}^m(f), m \geq 2.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f'(a)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} q_1=0 \\ r_1=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(X)=q(X)(X-a)^2 \text{ un } a$$

ir vairākkārtīga sakne. ■

**1.10. piemērs.**

### 1.4.3. Polinoma kvadrātbrīvās faktorizācijas atrašana

Saka, ka laukam $k$ *harakteristika (raksturojums, char(k))* ir vienāda ar $\chi \in \mathbb{P}$, ja $\chi \cdot 1 = 0$. Ja $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ n \cdot 1 \neq 0$, tad $char(k) = 0$.

**1.11. piemērs.** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - lauki ar harakteristiku 0. $\mathbb{F}_p$ - lauks ar harakteristiku $p$.

$p \in \mathcal{I}(k[X])$. Ja izpildās $\left\{\begin{array}{l} p^\alpha | f \\ p^{\alpha+1} \nmid f, \end{array}\right.$ tad $p$ kārtu attiecībā uz $f$

definē vienādu ar $\alpha$, $ord_p(f) = \alpha$.

**1.10. teorēma.** $k$ - lauks, $char\ k = 0$, $f \in k[X]$, $p \in \mathcal{I}(k[X])$, $p|f$. Tad

$$ord_p(f) = \alpha \implies ord_p(f') = \alpha - 1.$$

PIERĀDĪJUMS Ir dots, ka

$$f = p^\alpha g, \text{ kur } LKD(p, g) = 1 \implies$$

$$f' = \alpha p^{\alpha-1} p' g + p^\alpha g' = p^{\alpha-1} \underbrace{(\alpha p' g + p g')}_{\text{dalās ar } p?} \implies p^{\alpha-1} | f'.$$

Pierādīsim, ka $p \nmid (\alpha p' g + p g')$. No tā sekos, ka $p^\alpha \nmid f'$.

Pieņemsim pretējo. $p|(\alpha p' g + p g') \implies p|\alpha p' g$.

$\deg(p) > \deg(p') \implies LKD(p, p') = 1$.

$$\begin{cases} LKD(p, g) = 1 \\ LKD(p, p') = 1 \end{cases} \implies p \nmid \alpha p' g \text{ - pretruna.}$$

$k[X]$ ir VFG $\implies p \nmid (kp'g + pg')$. ■

**1.12. piemērs.** $f = X^2(X+1)$, $ord_X(f) = 2$, $f' = X(3X+2)$, $ord_X(f') = 1$.

**1.11. teorēma.** (Kvadrātbrīvās faktorizācijas formula) $k$ - lauks, $char\ k = 0$, $f \in k[X]$. Tad

$$f = p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m} \implies \frac{f}{LKD(f, f')} = p_1 ... p_m.$$

PIERĀDĪJUMS No iepriekšējās teorēmas zinām, ka
$f' = p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1} h$, kur $p_i \nmid h \implies LKD(f, f') = p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1}$.

Izdalot $f$ ar $LKD(f, f')$, iegūsim vēlamo formulu:

$$\frac{f}{LKD(f, f')} = \frac{p_1^{\alpha_1} ... p_m^{\alpha_m}}{p_1^{\alpha_1 - 1} ... p_m^{\alpha_m - 1}} = p_1 ... p_m. ■$$

**1.4. piezīme.** Nosacījumu $char\ k = 0$ var aizvietot ar nosacījumu

$\alpha_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ char(k))$ jeb $char\ k \nmid \alpha_i$, kas izpildās, piemēram, šādos gadījumos:

- $char(k) = 0$,
- $char(k) > \deg(f)$.

**1.13. piemērs.** Faktorizēsim polinomu

$$f(X) = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

Atrodam $f'(X) = 5X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$.

Atrodam $LKD(f, f') = X^3 - X^2 - X + 1$ izmantojot Eiklīda algoritmu $\Longrightarrow$

$$\frac{f}{LKD(f, f')} = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

Dalot $f$ vairākas reizes ar $X - 1$ un $X + 1$, iegūsim faktorizāciju

$$f(X) = (X - 1)^3 (X + 1)^2.$$

# 2. 3.mājasdarbs

## 2.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Sadaliet doto polinomu nedalāmos reizinātājos virs dotā lauka:

(a) $f(X) = X^6 + 27$, virs $\mathbb{Q}$, virs $\mathbb{R}$,

(b) $f(X) = X^5 - X$, virs $\mathbb{F}_5$.

3.2 Atrodiet visus nedalāmos polinomus

(a) ar pakāpi 4 virs $\mathbb{F}_2$,

(b) ar pakāpi 3 virs $\mathbb{F}_3$,

(c) ar pakāpi 2 virs $\mathbb{F}_5$.

3.3 Pierādiet, ka polinomam

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{F}_2[X]$$

eksistē lineārs dalītājs tad un tikai tad, ja

$$a_0 = 0 \text{ vai } \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1.$$

3.4 Nosakiet saknes $a$ kārtu dotajā polinomā $f$:

(a) $f(X) = X^4 - X^3 - X + 1$, $a = 1$, virs $\mathbb{Q}$,

(b) $f(X) = X^3 + X + 1$, $a = 1$, virs $\mathbb{F}_3$.

3.5 Atrodiet polinomu $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ ar šādu īpašību:

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 2.$$

## 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.6 Izpētiet, kādos gadījumos polinoms $f \in \mathbb{F}_p[X]$ atbilst injektīvai funkcijai $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$, un kādos - neinjektīvai. Kāda ir saistība starp funkcijas grafa struktūru un polinoma struktūru?

3.7 Pamatojiet *Ņūtona interpolācijas formulu.* $k$ - lauks. Ja ir doti $n + 1$ dažādi $k$ elementi $a_0, ..., a_n$ un $n + 1$ $k$ elementi $b_0, ..., b_n$, tad $f(X) \in k[X]$, kas apmierina nosacījumus

$$f(a_i) = b_i \text{ visiem } 0 \leq i \leq n,$$

var tikt meklēts formā

$$f(X) = c_0 + c_1(X - a_0) + c_2(X - a_0)(X - a_1) + ... \\ + c_n(X - a_0)...(X - a_{n-1}) = \\ c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{i} (X - a_{j-1}).$$

Mēğiniet atrast $c_k$ kā funkciju no $a_i$ un $b_i$, $0 \leq i \leq n$.