DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

2.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Viennozīmīgas faktorizācijas kritērijs

1.1. teorēma. R - GFG.

$$R \text{ ir VFG } \iff \Big(p\text{- nedalāms } \implies p \text{ - pirmelements}\Big), \forall p.$$

(citos terminos R ir VFG $\iff \mathcal{I}(R) = \mathcal{P}(R)$).

PIERĀDĪJUMS
R **ir VFG** $\implies \forall\ p \in \mathcal{I}(R)$**:** $p|ab \implies p|a$ **vai** $p|b$.

$p|ab \implies ab = cp$. Ja R ir VFG, tad

$$ab = \underbrace{p_1 p_2 ... p_k}_{a} \underbrace{p_{k+1} ... p_n}_{b} = \underbrace{(p'_1 p'_2 ... p'_l)}_{c} p.$$

No viennozīmīgās faktorizācijas seko, ka $p \sim p_i \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ $\implies p|a$ vai $p|b$.

$\forall\ p \in \mathcal{I}(R)$: $p|ab \implies p|a$ vai $p|b \implies R$ ir VFG.

Izmantosim matemātisko indukciju pēc nedalāmo elementu skaita faktorizācijā.

Indukcijas bāze. $r \in \mathcal{U}(R) \implies r$ nevar izteikt kā divu vai vairāku nedalāmu elementu reizinājumu un $r = u(u^{-1}r)$, tāpēc apgalvojums ir spēkā.

Indukcijas solis. Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā visiem R elementiem, kurus var izteikt ne vairāk kā $n-1$ nedalāmu elementu reizinājuma veidā un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir spēkā elementiem, kurus var izteikt n nedalāmu elementu reizinājuma viedā.

Pieņemsim, ka $r \in R$ ir n nedalāmu elementu reizinājums:

$$r = p_1 p_2 ... p_n.$$

Pieņemsim, ka r var izteikt kā nedalāmu elementu reizinājumu divos veidos:

$$r = p_1 p_2 ... p_n = p'_1 p'_2 ... p'_l.$$

$p_n | r \implies p_n$ dala vismaz vienu no nedalāmajiem elementiem $p'_1, ..., p'_l$, pieņemsim, ka $p_n | p'_l$.

Seko, ka $p'_l = u p_n$, kur $u \in \mathcal{U}(R)$, jo p'_l ir nedalāms.

Izmantojot saīsināšanas īpašību integrālajos gredzenos, saīsinām ar p_n abas puses. Iegūstam vienādību

$$p_1 p_2 ... p_{n-1} = u p'_1 p'_2 ... p'_{l-1}.$$

Kreisajā pusē ir elements, kas ir $n-1$ nedalāmu elementu reizinājums, tātad saskaņā ar indukcijas pieņēmumu, labajā pusē ir $n-1$ nedalāmi elementi, kas ir asociēti ar $p_1, .., p_{n-1}$.

Tātad $p_n \sim p'_l$, $n = l$, kopas $\{p_1, ..., p_{n-1}\}$ elementi ir asociēti ar kopas $\{p'_1, ..., p'_{n-1}\}$ elementiem. Apvienojot šos divus apgalvojumus, redzam, ka kopas $\{p_1, ..., p_n\}$ elementi ir asociēti ar kopas $\{p'_1, ..., p'_n\}$ elementiem.

Seko, ka r sadalījums nedalāmu elementu reizinājumā ir noteikts viennozīmīgi atbilstoši VFG definīcijai. ■

2. 2.mājasdarbs

2.1. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.7 Atrast IG R, kuram neizpildās viennozīmīgās faktorizācijas kritērija nosacījums (R nav GFG), katrs nedalāms elements ir pirmelements un kas nav VFG.