DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

1.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Polinomu īpašības ar pierādījumiem 2

2. Viena argumenta pakāpju rindas 4

3. 1.mājasdarbs 9

1. Polinomu īpašības ar pierādījumiem

1.1. teorēma. Kopa R^* ar definētajām operācijām veido komutatīvu gredzenu ar vieninieku $(1, 0, ...)$ un nulli $(0, 0, ...)$.

PIERĀDĪJUMS (Daļēji patstāvīgajam darbam) Ir jāpārbauda visas komutatīvā gredzena aksiomas:

- Komutatīvas grupas struktūra attiecībā uz $+$:
  - asociativitāte izpildās $\forall$ indeksam, tātad arī visai virknei,

- neitrālais elements ir nulles virkne $(0, ...)$,
- elementa $f = (a_0, a_1, ...)$ aditīvi inversais elements

$$-f = (-a_0, -a_1, ...),$$

- komutativitāte izpildās $\forall$ indeksam, tātad arī visai virknei,

- operācijas $\cdot$ asociativitāte: pierādām, ka asociativitāte izpildās $\forall$ indeksam, ja

$$f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, ...),$$
$$g = (b_0, b_1, ..., b_n, 0, ...),$$
$$h = (c_0, c_1, ..., c_n, 0, ...),$$

tad

$$\Big((f \cdot g) \cdot h\Big)_k = \sum_{i=0}^{k} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\Big) c_{k-i} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} a_j \Big(\sum_{i=j}^{k} b_{i-j} c_{k-i}\Big) = \sum_{i=0}^{k} a_i \Big(\sum_{j=i}^{k} b_{j-i} c_{k-j}\Big),$$

no otras puses,

$$\Big(f\cdot(g\cdot h)\Big)_k=\sum_{i=0}^{k}\Big(\sum_{j=0}^{k-i}a_ib_j\Big)c_{k-i-j}=\sum_{i=0}^{k}a_i\Big(\sum_{j'=i}^{k}b_{j'-i}c_{k-j'}\Big),$$

kur $j'=i+j$,

- distributivitāte: pierādām, ka izpildās $\forall$ indeksam,
- operācijas $\cdot$ komutativitāte: pierādām, ka izpildās $\forall$ indeksam,
- multiplikatīvā neitrālā elementa (vieninieka) eksistence: apzīmējam $(1,0,...)$ ar 1, pārbaudām, ka $\forall\ f\in R^*$

$$f\cdot 1=1\cdot f=f.\blacksquare$$

2. Viena argumenta pakāpju rindas

Polinomi tika definēti kā ierobežotas gredzena elementu virknes - tikai galīgs skaits elementu virknē ir atšķirīgi no nulles.

Ja atļausim neierobežotas elementu virknes, tad iegūsim *viena argumenta pakāpju rindu gredzenus*.

Pieņemsim, ka ir dots komutatīvs gredzens R, apzīmēsim ar $R^\sharp$ tā elementu bezgalīgu virkņu kopu. Atšķirībā no R^* kopas $R^\sharp$ elementiem $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ var būt bezgalīgi daudz nenulles elementu.

Kopā $R^\sharp$ definēsim divas bināras operācijas tāpat kā kopā R^*.

Jāatzīmē, ka šīs operācijas ir korekti definētas, jo katra koeficienta aprēķināšanai ir jāveic galīgs skaits gredzena operāciju.

2.1. teorēma. Kopa $R^\sharp$ ar definētajām operācijām veido komutatīvu gredzenu ar nulli $(0, ...)$ un vieninieku $(1, 0, ...)$.

Tāpat kā polinomu gadījumā definēsim $X = (0, 1, 0, ...)$. Redzam, ka jebkurš

$$(a_0, a_1, ...) \in R^\sharp$$

viennozīmīgi izsakās formā

$$(a_0, a_1, ...) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i.$$

Kopu $R^\sharp$ ar divām definētajām binārajām operācijām sauc par *viena argumenta (formālo) pakāpju rindu gredzenu virs* R, apzīmē kā $R[[X]]$, elementus sauc par (formālām) pakāpju rindām.

Polinomu var uzskatīt par pakāpju rindu, tāpēc ir definēta funkcija

$$R[X] \to R[[X]],$$
$$f(X) \mapsto f(X)$$

(dabiskā iekļaušana).

Pakāpju rindu gredzenos elementa pakāpe deg nav definēta. Tās vietā definē elementa *kārtu*: par pakāpju rindas f kārtu $\omega(f)$ sauc minimālo indeksu, kuram atbilstošais koeficients nav nulle (jaunākā koeficienta indeksu).

2.2. teorēma. R - IG, $f, g \in R[[X]]$. Tad

1. $\omega(f+g) \geq \min(\omega(f), \omega(g))$.
2. $\omega(fg) = \omega(f) + \omega(g)$.
3. $R[[X]]$ ir IG.
4. dabiskā iekļaušana $R[X] \to R[[X]]$ ir gredzenu homomorfisms.

PIERĀDĪJUMS 1. Divu pakāpju rindu summas jaunākā koeficienta indekss nevar būt mazāks kā mazākā no pakāpju rindu kārtām (var būt lielāks, ja koeficienti pie dažiem monomiem saīsinās).

2. Pakāpju rindu reizinājuma jaunākais koeficients ir pakāpju rindu jaunāko koeficientu reizinājums. Ja

$$f = a_n X^n + ...,$$
$$g = b_m X^m + ...,$$

tad

$$fg = (a_n X^n + ...)(b_m X^m + ...) = (a_n b_m) X^{n+m} + ...$$

R - IG $\Longrightarrow$ $a_n b_m \neq 0$ un

$$\omega(fg) = n + m = \omega(f) + \omega(g).$$

3. $fg = 0 \Longrightarrow \deg(f) + \deg(g) = -\infty \Longleftrightarrow f = 0$ vai $g = 0$.

4. Dabiskās iekļaušanas sašaurinājums uz $R[X] \subset R[[X]]$ ir vienības funkcija, tātad tas ir gredzenu homomorfisms. ■

3. 1.mājasdarbs

1.8 Atrast $R[[X]]$ invertējamos elementus.

1.9 Vai gredzenā $R[[X]]$ ir viennozīmīgi noteikta dalīšana ar atlikumu?