DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Polinomu algebra

12.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt simetrisko polinomu teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt īpaša veida vairāku argumentu polinomus, kas nemainās, ja tajos tiek mainīti argumenti - simetriskos polinomus,
- var definēt vairākas simetrisko polinomu klases - elementāros polinomus, pakāpju polinomus u.c.
- katru simetrisko polinomu var izteikt kā polinomu no elementārajiem polinomiem.

1. Simetriskie polinomi

Šajā lekcijā apskatīsim polinomus virs lauka k. Teiksim, ka $f \in k[X_1, ..., X_n]$ satur termu aX^μ, $a \neq 0$, ja $f = aX^\mu + ...$

1.1. Definīcijas

1.1.1. Permutācijas

Par kopas A *permutāciju* sauc bijektīvu funkciju

$$\sigma : A \to A.$$

Visu n elementu kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju kopu apzīmē ar Σ_n.

1.1. piezīme. $|\Sigma_n| = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!$.

Permutāciju pierakstam var izmantot šādus veidus:

- *attēlu saraksts* - $\sigma \rightsquigarrow (\sigma(1), ..., \sigma(n))$;

- *horizontālais pieraksts* - $\sigma \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- *funkcionālais grafs* ar vienu vai diviem kopas eksemplāriem.

Katrā kopā A eksistē tikai viena universāli definēta permutācija - *vienības permutācija* id: $\mathrm{id}(x) = x$.

Kopā Σ_n var definēt *kompozīcijas* operāciju. Ja ir dotas divas permutācijas σ_1 un σ_2, tad to kompozīcija $\sigma_1\sigma_2$ ir definēta ar nosacījumu

$$(\sigma_1\sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)), \forall x.$$

Katrai permutācijai σ eksistē *inversā permutācija* σ^{-1}, kas ir definēta ar nosacījumu

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}\,.$$

Permutāciju $\sigma : A \to A$ sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un A elementus var sakārtot virknē $(a_1,...,a_n)$ tā, ka $\sigma(a_i) = a_{i+1 \text{ mod n}}$,
- vai arī $|A| = 1$ (un kopas A vienīgais elements a apmierina vienādību $\sigma(a) = a$).

1.1. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) Katrai galīgas kopas A permutācijai σ eksistē viennozīmīgi noteikts A sadalījums apakškopās $A_1, ..., A_m$ tāds, ka $\forall\ i\ \sigma$ sašaurinājums uz A_i ir cikls.

Var definēt permutācijas *ciklisko pierakstu* šādā veidā. Ja

$$A_1 = \{a_{11}, ..., a_{1n_1}\}, ..., A_m = \{a_{m1}, ..., a_{mn_m}\},$$

$$\sigma(a_{11}) = a_{12}, ..., \sigma(a_{1n_1}) = a_{11}, ...$$
$$\sigma(a_{m1}) = a_{m2}, ..., \sigma(a_{mn_m}) = a_{m1},$$

tad $\sigma = (a_{11}a_{12}...a_{1n_1})...(a_{m1}a_{m2}...a_{mn_m})$ (katrs cikls atdalīts ar iekavām). Ciklus ar garumu 1 (*fiksētos punktus*) cikliskajā pierakstā neuzrāda.

1.1. piemērs. Permutāciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ var sadalīt divos ciklos $\{1,5\} \cup \{2,4,3\}$ un apzīmēt kā (15)(243).

Dažas biežāk izmantojamas permutācijas:

- *transpozīcijas* - $\sigma: \ \sigma = (ab)$;
- *involūcijas* - $\sigma: \ \sigma^2 = \mathrm{id}$.

1.2. piemērs. (12) - transpozīcija. (12)(35)(46) - involūcija, var ievērot, ka cikli ar atdalītām kopām komutē.

1.2. teorēma. Kopa Σ_n ar kompozīcijas operāciju veido grupu (nekomutatīvu, ja $n \geq 3$).

PIERĀDĪJUMS Funkciju kompozīcija ir asociatīva. $\exists$ vienības elements - vienības permutācija. $\forall$ permutācijai $\exists$ inversais elements - inversā permutācija. ■

1.3. piemērs. Operāciju tabulas grupām Σ_2 un Σ_3.

1.1.2. Permutāciju grupas darbība polinomu gredzenā

$\forall\, \sigma \in \Sigma_n$ un $\forall\, aX^\mu = aX_1^{\mu_1} ... X_n^{\mu_n} \in k[X_1, ..., X_n]$ definēsim termu $\sigma \circ (aX^\mu)$ ar šādu nosacījumu:

$$\sigma \circ (aX^\mu) = aX_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}.$$

Par monoma X^μ *orbītu* $Orb(X^\mu)$ sauc kopu $\bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma \circ (X^\mu)$.

1.4. piemērs. $(12) \circ (X_1 X_2^4 X_3^5) = X_2 X_1^4 X_3^5 = X_1^4 X_2 X_3^5$,

1.5. piemērs. $n = 2 \implies Orb(X_1X_2) = \{X_1X_2\}$, $Orb(X_2) = Orb(X_1^2) = \{X_1^2, X_2^2\}$.
$n = 3 \implies Orb(X_1^2X_2X_3) = \{X_1^2X_2X_3, X_1X_2^2X_3, X_1X_2X_3^2\}$.

$\forall\ \sigma \in \Sigma_n$ un $\forall\ f = \sum_\mu a_\mu X_1^{\mu_1} ... X_n^{\mu_n} \in k[X_1, ..., X_n]$ definēsim polinomu $\sigma \circ f$ ar šādu nosacījumu:

$$\sigma \circ f = \sum_\mu \sigma \circ (a_\mu X^\mu) = \sum_\mu a_\mu X_{\sigma(1)}^{\mu_1} ... X_{\sigma(n)}^{\mu_n}.$$

Tādējādi $\forall\ \sigma$ ir definēta *σ-darbības funkcija*

$$T_\sigma : k[X_1, ..., X_n] \to k[X_1, ..., X_n],$$
$$T_\sigma(f) = \sigma \circ f.$$

1.6. piemērs.

$f = X_1 + X_2X_3\ \wedge\ \sigma = (23) \implies$

$\sigma \circ f = X_{\sigma(1)} + X_{\sigma(2)}X_{\sigma(3)} = X_1 + X_3X_2 = X_1 + X_2X_3 = f.$

$f \in k[X_1, ..., X_n]$ sauksim par *simetrisku polinomu (SP)*, ja

$$\sigma \circ f = f, \forall\ \sigma \in \Sigma_n.$$

Citiem vārdiem sakot, veicot jebkādu argumentu permutāciju, f nemainās, f ir *invariants attiecībā uz grupas Σ_n darbību.* Visu SP kopu apzīmēsim ar $k[X_1, , , ., X_n]^S$.

1.7. piemērs. Simetriskie monomi - $a(X_1...X_n)^m$.

Simetriskie polinomi - konstantes, $X_1 + X_2, X_1X_2 \in k[X_1, X_2]$, $X^2 + XY + Y^2 \in k[X, Y]$.

Nesimetriski polinomi - $X_1^2X_2$, $X + 2Y$.

1.1.3. Simetrisko polinomu klases

SP sauksim par *elementāru SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$e_m(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_m\leq n} X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}.$$

Definēsim arī $e_0 = 1$. Redzam, ka $m \leq n$.

1.8. piemērs. $n = 1 \implies e_1(X) = X$.

$n = 2 \implies$

$$\begin{cases} e_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \\ e_2(X_1, X_2) = X_1X_2 \end{cases}$$

$n = 3 \implies$

$$\begin{cases} e_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3, \\ e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3, \\ e_3(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2X_3. \end{cases}$$

1.2. piezīme. Atverot iekavas izteiksmei

$$(X - c_1)(X - c_2)...(X - c_n),$$

iegūsim

$$X^n - e_1(c_1, ..., c_n)X^{n-1} + e_2(c_1, ..., c_n)X^{n-2} + ... + (-1)^{n+1}e_n(c_1, ..., c_n).$$

SP sauksim par *pakāpju summu SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$p_m(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^m.$$

Definēsim arī $p_0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

1.9. piemērs. $n = 1 \implies p_m(X) = X^m$.

$$n = 3 \implies p_m(X_1, X_2, X_3) = X_1^m + X_2^m + X_3^m.$$

SP sauksim par *pilno homogēno SP*, ja tas ir izsakāms formā

$$h_m(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_m \le n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_m}.$$

Definēsim arī $h_0 = 1$. Citiem vārdiem sakot h_m ir vienāds ar visu monomu summu, kuriem $\deg = m$.

1.10. piemērs. $n = 1 \implies h_m(X) = X^m$.

$$n = 2 \implies$$
$$\begin{cases} h_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2, \\ h_2(X_1, X_2) = X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2, \\ h_3(X_1, X_2) = X_1^3 + X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_2^3, \\ ... \end{cases}$$

Ja $X^\mu = X_1^{\mu_1} ... X_n^{\mu_n}$, tad par *$\mu$-monomiālo SP* m_μ sauksim

$$S(X^\mu) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma \circ X^\mu = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} X_{\sigma(1)}^{\mu_1} X_{\sigma(2)}^{\mu_2} ... X_{\sigma(n)}^{\mu_n}.$$

1.11. piemērs. $m_{(2,0)} = S(X_1^2) = S(X_i^2) = (n-1)! \sum_{i=1}^n X_i^2$.
$m_{(1,1)} = S(X_1 X_2) = 2(n-1)! \sum_{i<j}^n X_i X_j$.
$e_k = c \cdot S(X_1 X_2 ... X_k)$.

1.2. Simetrisko polinomu īpašības

1.2.1. Atkāpe - polinomu kopas kā lineāras telpas

$k[X_1, ..., X_n]$ ir lineāra telpa virs k (k-lineāra telpa).

Par $k[X_1, ..., X_n]$ kā lineārās telpas bāzi (nejaukt ar ideāla bāzi) var izvēlēties (bezgalīgo) visu monomu kopu $\{X_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}^{*n}}$:

$$f = \sum_\mu c_\mu X^\mu.$$

Tādējādi $k[X_1, ..., X_n]$ ir bezgalīgi dimensionāla k-lineāra telpa.

1.2.2. Permutāciju darbības īpašības

1.3. teorēma.

1. $\forall \sigma \in \Sigma_n$ σ-darbība termu kopā ir bijektīva funkcija.
2. Ja f ir homogēns polinoms ar pakāpi m, tad $\sigma \circ f$ arī ir homogēns polinoms ar pakāpi m.

PIERĀDĪJUMS
1. Injektivitāte
$\sigma \circ (aX_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n}) = \sigma \circ (bX_1^{\lambda_1}...X_n^{\lambda_n}) \Longrightarrow$
$aX_{\sigma(1)}^{\mu_1}...X_{\sigma(n)}^{\mu_n} = bX_{\sigma(1)}^{\lambda_1}...X_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \Longrightarrow \forall i : \mu_i = \lambda_i \Longrightarrow$
$X^\mu = X^\lambda \ \wedge \ a = b.$

Sirjektivitāte $\forall \nu$ izpildās

$$aX_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n} = aX_{\sigma\sigma^{-1}(1)}^{\nu_1}...X_{\sigma\sigma^{-1}(n)}^{\nu_n} = \sigma \circ (aX_{\sigma^{-1}(1)}^{\nu_1}...X_{\sigma^{-1}(n)}^{\nu_n}).$$

2. $\deg(\sigma \circ X^\mu) = \deg(X^\mu).\blacksquare$

Termu $aX^{\mu} = aX^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)}$ sauksim par monotonu, ja

$$\mu_1 \geq ... \geq \mu_n.$$

1.4. teorēma. aX^{μ} ir monotons $\Longrightarrow \sigma \circ (aX^{\mu}) \preceq aX^{\mu}, \forall\ \sigma.$

PIERĀDĪJUMS Ievērosim, ka termam $\rho \circ (aX^{\mu})$ kāpinātājs pie X_i ir vienāds ar $\mu_{\rho^{-1}(i)}$ - aX^{μ} kāpinātāju pie $X_{\rho^{-1}(i)}$. Šī iemesla dēļ sākotnējo permutāciju ērtāk apzīmēt ar σ^{-1}.

Pieņemsim pretējo: $\exists \sigma^{-1} \in \Sigma_n : \sigma^{-1} \circ (aX^{\mu}) \succ aX^{\mu} \Longrightarrow$

$$\exists\ \sigma :\ (\mu_1, ..., \mu_n) \prec (\mu_{\sigma(1)}, ..., \mu_{\sigma(n)}) \Longrightarrow$$

$\exists\ i :\ \mu_{\sigma(i)} > \mu_i$ un $\mu_{\sigma(j)} = \mu_j, \forall\ j < i$. Tas nav iespējams, jo visi μ_l, kas ir lielāki nekā μ_i, jau ir starp elementiem $\{\mu_{\sigma(1)}, ..., \mu_{\sigma(i-1)}\}$.
$\blacksquare$

1.5. teorēma. Permutācijas darbība polinomu gredzenā ir gredzenu homomorfisms.

PIERĀDĪJUMS Ir jāpierāda, ka permutācijas σ darbība saglabā summu un reizinājumu.

Saskaitīšana

$$\begin{cases} f = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_i} \ldots X_n^{i_n} \\ g = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_i} \ldots X_n^{i_n} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma \circ f = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} \ldots X_{\sigma(n)}^{i_n}, \\ \sigma \circ g = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} \ldots X_{\sigma(n)}^{i_n}. \end{cases}$$

Redzam, ka

$$\sigma \circ (f+g) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (a_{i_1\dots i_n} + b_{i_1\dots i_n}) X_{\sigma(1)}^{i_i} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n} =$$

$$\sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n} + \sum_{i_1,\dots,i_n} b_{i_1\dots i_n} X_{\sigma(1)}^{i_i} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n} =$$

$$\sigma \circ f + \sigma \circ g = \sigma \circ f + \sigma \circ g.$$

Reizināšana Reizināšanas saglabāšanu no sākuma pierādīsim uz monomiem, pēc tam no tikko pierādītās summas saglabāšanas sekos reizināšanas saglabāšana patvaļīgiem polinomiem.

Redzam, ka

$$\sigma \circ (X_1^{\mu_1} \dots X_n^{\mu_n} \cdot X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}) = \sigma \circ (X_1^{\mu_1+\nu_1} \dots X_n^{\mu_n+\nu_n}) =$$

$$X_{\sigma(1)}^{\mu_1+\nu_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\mu_n+\nu_n} = X_{\sigma(1)}^{\mu_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\mu_n} \cdot X_{\sigma(1)}^{\nu_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\nu_n} =$$

$$(\sigma \circ X_1^{\mu_1} \dots X_n^{\mu_n}) \cdot (\sigma \circ X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}).$$

Ja $f = \sum_i f_i$, $g = \sum_j g_j$, kur f_i, g_j ir termi, tad

$$\sigma \circ (fg) = \sigma \circ (\sum_{i,j} f_i g_j) = \sum_{i,j} \sigma \circ (f_i g_j) = \sum_{i,j} (\sigma \circ f_i)(\sigma \circ g_j) =$$

$$(\sum_i \sigma \circ f_i)(\sum_j \sigma \circ g_j) = (\sigma \circ \sum_i f_i)(\sigma \circ \sum_j g_j) = (\sigma \circ f)(\sigma \circ g). \blacksquare$$

1.2.3. Simetrisko polinomu struktūra

1.6. teorēma. $f \in k[X_1, ..., X_n]^S \implies$ f termu kopā σ-darbība ir bijektīva - $\exists$ f termu kopas sadalījums σ-darbības ciklos ar vienādiem koeficientiem.

PIERĀDĪJUMS

Saskaņā ar iepriekš pierādītu teorēmu, visu termu kopā σ-darbība ir bijektīva - visu termu kopu var sadalīt galīgās apakškopās, katrā no kurām σ-darbības sašaurinājums ir cikls.

Ja f termu kopa nav σ-darbības ciklu apvienojums, tad $\sigma \circ f \neq f$.

Ja f termu kopa ir σ-darbības ciklu apvienojums, tad $\sigma \circ f = f$.
■

1.12. piemērs. $X^3 + 2X^2Y + 2XY^2 + Y^3$.

1.7. teorēma. Simetriska polinoma vecākais terms ir monotons.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka SP f vecākais terms ir

$$\mathcal{H} = aX_1^{\mu_1}...X_i^{\mu_i}X_{i+1}^{\mu_{i+1}}...X_n^{\mu_n},\ \text{kur}\ \mu_i < \mu_{i+1}.$$

f ir SP $\Longrightarrow$ f satur termu $\tau \circ \mathcal{H}$, kur $\tau = (i, i+1)$. Redzam, ka

$$\tau \circ \mathcal{H} = aX_1^{\mu_1}...X_i^{\mu_{i+1}}X_{i+1}^{\mu_i}...X_n^{\mu_n} \succ \mathcal{H} - \text{pretruna.}\blacksquare$$

1.8. teorēma. $\forall$ SP var izteikt monomiālo SP lineāras kombinācijas veidā: $f \in k[X_1, ..., X_n]^S \implies f = \sum_\mu c_\mu S(X^\mu)$.

PIERĀDĪJUMS Pietiek pierādīt apgalvojumu homogēnam SP f.

f satur termu $a_1 X^{\mu_1} \Longrightarrow$ f satur $a_1(\sigma \circ (X^\mu))$, $\forall\ \sigma$. Izvēlēsim tādu monomu $X^{\mu_1} = \sigma_1 \circ (X^\mu)$, kas ir lielākais leksikogrāfiskajā sakārtojumā. Definēsim $f_1 = f - a_1 S(X^{\mu_1})$.

$f_1 \neq 0 \implies f_1$ satur vismaz vienu termu $a_2 X^{\mu'}$, kur $X^{\mu'} \prec X^{\mu_1} \implies f_1$ satur $a_2(\sigma \circ (X^{\mu'}))$, $\forall\ \sigma$. Izvēlēsim tādu monomu $X^{\mu_2} = \sigma_2 \circ (X^{\mu'})$, kas ir lielākais leksikogrāfiskajā sakārtojumā. Definēsim $f_2 = f_1 - a_2 S(X^{\mu_2})$.

Turpināsim šo procesu. Tā kā lielākie atlikušie orbītu vecākie termi kļūst stingri mazāki, tad pēc galīga skaita soļiem process apstāsies un iegūsim $f_l = 0$. Seko teorēmas apgalvojums. ■

1.13. piemērs.

$$
\begin{aligned}
(X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) = X_1^2 X_2 + X_1^2 X_3 + \\
X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2 + X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2 + 2X_1 X_2 X_2 = \\
S(X_1^2 X_2) + \frac{1}{3} S(X_1 X_2 X_3).
\end{aligned}
$$

1.2.4. Simetriskie polinomi veido apakšgredzenu

1.9. teorēma.

1. $\forall\ n\ k[X_1, ..., X_n]^S$ ir lineāra telpa.
2. $\forall\ n\ k[X_1, ..., X_n]^S$ ir $k[X_1, ..., X_n]$ apakšgredzens.

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka divu SP f un g summa un f reizinājums ar g ir SP:

$$\sigma \circ (f + g) = \sigma \circ f + \sigma \circ g = f + g, \forall \sigma,$$

$$\sigma \circ (fg) = (\sigma \circ f)(\sigma \circ g) = fg, \forall \sigma. \blacksquare$$

1.3. Simetrisko polinomu pamatteorēma

1.10. teorēma. $\forall f \in k[X_1,...,X_n]^S$ var viennozīmīgi izteikt formā

$$f(X_1,...,X_n) = g(e_1,...,e_n), \text{ kur } g \in k[Y_1,...,Y_n].$$

PIERĀDĪJUMS $\forall$ SP f ir homogēnu SP summa $\Longrightarrow$ pietiek pierādīt apgalvojumu, ja f ir homogēns SP.

1.solis Eksistence un algoritms.
Pierādīsim, ka $\forall f \in k[X_1,...,X_n]^S \; \exists g \in k[Y_1,...,Y_n]$ tāds, ka

$$f(X_1,...,X_n) = g\Big(e_1(X_1,...,X_n),...,e_n(X_1,...,X_n)\Big).$$

Pamatideja - sākot ar f veiksim "redukcijas" atņemot polinomus formā $ae_1^{\gamma_1}...e_n^{\gamma_n}$ tā, lai katra šāda "redukcija" samazinātu vecāko termu. Izrādās, kas tas vienmēr ir iespējams. Beigās iegūsim 0, tātad f ir izsakāms kā $ae_1^{\gamma_1}...e_n^{\gamma_n}$ tipa polinomu summa.

Pieņemsim, ka $\mathcal{H}(f) = aX_1^{\mu_1}...X_n^{\mu_n}$, kur $\mu_i \geq \mu_{i+1}$.

Definēsim $f_1 = f - ae_1^{\mu_1-\mu_2}e_2^{\mu_2-\mu_3}...e_n^{\mu_n}$.
Redzam, ka

$$\deg(e_1^{\mu_1-\mu_2}e_2^{\mu_2-\mu_3}...e_n^{\mu_n}) =$$
$$(\mu_1-\mu_2)+2(\mu_2-\mu_3)+...+n\mu_n = \mu_1+\mu_2+...\mu_n = \deg(f).$$

Redzam, ka $f_1 \in k[X_1, ..., X_n]^S$ un $\deg(f_1) = \deg(f)$.

Pierādīsim, ka $\mathcal{H}(f) \succ \mathcal{H}(f_1)$. Redzam, ka saskaņā ar vecākā terma multiplikativitātes īpašību

$$\mathcal{H}(ae_1^{\mu_1-\mu_2}e_2^{\mu_2-\mu_3}...e_n^{\mu_n}) = a\mathcal{H}(e_1^{\mu_1-\mu_2})\mathcal{H}(e_2^{\mu_2-\mu_3})...\mathcal{H}(e_n^{\mu_n}) =$$
$$a\mathcal{H}(e_1)^{\mu_1-\mu_2}\mathcal{H}(e_2)^{\mu_2-\mu_3}...\mathcal{H}(e_n)^{\mu_n} =$$
$$aX_1^{\mu_1-\mu_2}(X_1X_2)^{\mu_2-\mu_3}...(X_1...X_n)^{\mu_n} = aX_1^{\mu_1}X_2^{\mu_2}...X_n^{\mu_n} = \mathcal{H}(f).$$

Seko, ka starpībā $f_1 = f - ae_1^{\mu_1-\mu_2}e_2^{\mu_2-\mu_3}...e_n^{\mu_n}$ vecākie termi saīsinās un $\mathcal{H}(f) \succ \mathcal{H}(f_1)$.

Pieņemsim, ka $\mathcal{H}(f_1) = bX_1^{\nu_1}...X_n^{\nu_n}$, kur $\nu_i \geq \nu_{i+1}$.
Definēsim $f_2 = f_1 - be_1^{\nu_1-\nu_2}e_2^{\nu_2-\nu_3}...e_n^{\nu_n}$.
Spriežot līdzīgi, iegūsim, ka $\mathcal{H}(f) \succ \mathcal{H}(f_1) \succ \mathcal{H}(f_2)$.

Turpinot, pēc galīga skaita soļiem iegūsim SP $f_l = 0$, tāpēc

$$f = ae_1^{\mu_1-\mu_2}...e_n^{\mu_n} + be_1^{\nu_1-\nu_2}...e_n^{\nu_n} + ... = g(e_1, ..., e_n) \in k[e_1, ..., e_n].$$

2.solis Vienīgums.
Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi polinomi $g_1, g_2 \in k[Y_1, ..., Y_n]$ tādi, ka

$$f = g_1(e_1, ..., e_n) = g_2(e_1, ..., e_n) \implies$$

$$\widehat{g} = g_1 - g_2 \neq 0 \text{ kā polinoms.}$$

No otras puses, ievietojot $\widehat{g}$ argumentu vietā e_i, iegūsim, ka

$$\widehat{g}\Big(e_1(X_1, ..., X_n), ..., e_n(X_1, ..., X_n)\Big) = 0.$$

Katram $\widehat{g}$ monomam $aY_1^{\lambda_1}...Y_n^{\lambda_n}$, $a \neq 0$, izpildās

$$\mathcal{H}(ae_1^{\lambda_1}e_2^{\lambda_2}...e_n^{\lambda_n}) = aX_1^{\lambda_1}(X_1X_2)^{\lambda_2}...(X_1X_2...X_n)^{\lambda_n} = aX_1^{\lambda_1+...\lambda_n}X_2^{\lambda_2+...+\lambda_n}...X_n^{\lambda_n}.$$

Funkcija

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto (\lambda_1 + ... + \lambda_n, \lambda_2 + ... + \lambda_n, ..., \lambda_n)$$

ir injektīva $\Longrightarrow$ dažādu $\widehat{g}(Y)$ monomu vecākie termi pēc e_i ievietošanas nevar saīsināties $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}(\widehat{g}(e)) \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\widehat{g}(e) \neq 0$ - pretruna. ■

1.3. piezīme. Ir pierādīts, ka $k[X_1, ..., X_n]^S = k[e_1, ..., e_n]$.

Līdzīgi rezultāti ir spēkā arī pakāpju summu SP un pilnajiem homogēnajiem SP:

- $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]^S = \mathbb{Q}[p_1, ..., p_n]$,
- $k[X_1, ..., X_n]^S = k[h_1, ..., h_n]$.

1.4. Algoritmi SP izteikšanai ar elementāro SP palīdzību

SP izteikšanu ar elementāro SP palīdzību sauksim par tā *elementarizāciju*.

1.4.1. Teorēmas algoritms

Var izmantot algoritmu, kas ir dots teorēmas pierādījumā.

1.14. piemērs. Elementarizēsim $f = X_1^4 + X_2^4$:

1. $f \to f_1 = f - e_1^4 = -4X_1^3X_2 - 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3$.
2. $f_1 \to f_2 = f_1 + 4e_1^2e_2 = 2X_1^2X_2^2$.
3. $f_2 \to f_3 = f_2 - 2e_2^2$.

$\Longrightarrow$ $f = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2$.

1.4.2. Nenoteikto koeficientu metode

Ja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ir pakāpju vektors, tad apzīmēsim

$$E(\alpha) = e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} ... e_n^{\alpha_n}.$$

Katram $m \in \mathbb{N}$ visu vienādojuma

$$1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + ... + n \cdot \alpha_n = m$$

atrisinājumu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{T}_m$.

Algoritmu var paātrināt šādā veidā:

1. Izteikt f kā homogēnu SP summu $f_1 + ... + f_d$.
2. $\forall\ f_i$ meklējam formā

$$f_i = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_i} c_\tau E(\tau),$$

   kur koeficienti c_τ tiek atrasti liekot X_i vietā konkrētus mazus veselus skaitļu, parasti 0 un ± 1.

1.15. piemērs. Elementarizēsim $X_1^5 + X_2^5 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$. Tas ir homogēns un vienāds ar $S(X_1^5)$. Elementarizācija ir jāmeklē formā

$$X_1^5 + X_2^5 = e_1^5 + ae_1^3e_2 + be_1e_2^2, \text{ kur } a, b \text{ - nezināmi.}$$

$$(X_1, X_2) = (1, 1) \Longrightarrow 2 = 2^5 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2.$$
$$(X_1, X_2) = (1, 2) \Longrightarrow 1 + 2^5 = 3^5 + a \cdot 3^3 \cdot 2 + b \cdot 3 \cdot 2^2.$$

Iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} 4a + b = -15 \\ 9a + 2b = -35 \end{cases} \Longrightarrow (a, b) = (-5, 5) \Longrightarrow$$

$$X_1^5 + X_2^5 = e_1^4 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2.$$

1.4.3. Grobnera bāzu metode - patstāvīgā lasīšana

$\{f_1, ..., f_m\} \in k[X_1, ..., X_n]$. Apzīmēsim ar $k[f_1, ..., f_m]$ apakšgredzenu, kuru ģenerē kopa $\{f_1, ..., f_m\}$ - visus polinomus no $\{f_1, ..., f_m\}$.

Var būt nepieciešamība risināt šādu problēmu: dots $f \in k[X_1, ..., X_n]$ noteikt, vai $f \in k[f_1, ..., f_m]$.

1.11. teorēma. $\{f_1, ..., f_m\} \subseteq k[X_1, ..., X_n]$. Definēsim ideālu

$$I = \langle Y_1 - f_1, ..., Y_m - f_m \rangle \subseteq k[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m].$$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(I)$ attiecībā uz leksikogrāfisko sakārtojumu

$$X_1 \succ X_2 \succ ... \succ X_n \succ Y_1 \succ ... Y_m.$$

Tad

$$\left(f \in k[f_1, ..., f_m] \iff \overline{f}^G \in k[Y_1, ..., Y_m]\right) \implies f(f_1, ..., f_m) = \overline{f}^G.$$

PIERĀDĪJUMS ■

1.16. piemērs. $n = 2 \implies f_1 = X_1 + X_2,\ f_2 = X_1X_2.$
$I = \langle Y_1 - X_1 - X_2, Y_2 - X_1X_2 \rangle.$
$G = \mathcal{G}(I) = \{X_1 + X_2 - Y_1, X_2^2 - X_2Y_1 + Y_2\}.$
$\overline{X_1^2 + X_2^2}^G = Y_1^2 - 2Y_2.$

2. 12.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Pierādīt, ka jebkuru permutāciju var izteikt kā transpozīciju kompozīciju.

12.2 σ ir permutācija ar zināmu sadalījumu ciklos, τ ir transpozīcija. Kāds var būt sadalījums ciklos permutācijai $\tau \circ \sigma$?

12.3 Izteikt SP

$$(X_1X_2 + X_3X_4)(X_1X_3 + X_2X_4)(X_1X_4 + X_2X_3)$$

formā $\sum_\mu c_\mu S(X^\mu)$.

12.4 Izteikt dotos SP izmantojot elementāros SP:

(a) $X_1^3 + X_2^3$;
(b) $X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_2^3X_3 + X_2X_3^3$;
(c) $(X_1X_2 + X_3)(X_1X_3 + X_2)(X_2X_3 + X_1)$;
(d) $\left[\prod_{i<j\le n}(X_i - X_j)\right]^2$, ja $n \in \{2, 3\}$.

12.5 c_1, c_2, c_3 ir vienādojuma

$$X^3 + 2X^2 + 3X + 4 = 0$$

saknes. Aprēķiniet $\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.6 Vispāriniet apgalvojumu par permutācijas sadalījumu ciklos uz šādiem gadījumiem:

(a) kopa A ir galīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva;
(b) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ ir bijektīva, f kārta ir galīga: $\exists\, n : \; f^n = \mathrm{id}$;
(c) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ ir bijektīva;
(d) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva.

12.7 Piedāvājiet algoritmus SP izteikšanai

(a) ar pakāpju summu SP palīdzību,
(b) ar pilno homogēno SP palīdzību.

12.8 Klasificējiet $k[X_1, ..., X_n]$ monomu orbītas.