DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Gausa metodes un matricu formālisma atkārtojums

1.1. Svarīgākie palīgjēdzieni

Atkārtosim un iespēju robežās pārnesīsim uz Diofanta lineārajām sistēmām zināmos lineāro vienādojumu sistēmu jēdzienus.

1.1.1. Lineāru vienādojumus sistēma (LVS) ar koeficientiem dotā gredzenā R

Par *gredzenu* sauc kopu ar divām binārām operācijām, kuras parasti apzīmē ar $+$ un $\cdot$, un kuras apmierina komutativitātes, asociativitātes un distributivitātes īpašības (piemēri - $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

sauksim par *lineāru vienādojumu sistēmu (LVS) virs gredzena* R, ja visas funkcijas f_i ir pirmās pakāpes polinomi ar koeficientiem no gredzena R.

Par LVS vispārīgo pierakstu sauksim sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kur x_j - *nezināmie*, a_{ij} - *koeficienti*, b_i - *brīvie locekļi*. Ja visi brīvie locekļi ir vienādi ar nulli, tad LVS sauksim par homogēnu. Ja nezināmo skaits ir neliels (ne vairāk kā 5), tad mēs apzīmēsim tos ar burtiem bez indeksiem - x, y, z u.c., kurus matemātikā tradicionāli izmanto nezināmo lielumu apzīmēšanai.

1.1.2. LVS paplašinātās matricas pieraksts

LVS ar n nezināmajiem un m vienādojumiem *paplašinātā matrica* ir tabula ar $n+1$ kolonnu un m rindām, kurā pēdējās kolonnas i-tajā rindā tiek rakstīts brīvais loceklis b_i, bet pirmajās n kolonnās tiek ierakstīti koeficienti pie nezināmajiem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

LVS *sistēmas matrica* ir tabula ar n kolonnām un m rindām, kurā tiek ierakstīti tikai koeficienti pie nezināmajiem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1.3. LVS (rindu) elementārie pārveidojumi

1. 1.veida pārveidojumi - vienādojumu (matricas rindu) mainīšana vietām - paliek spēkā arī Diofanta sistēmām,
2. 2.veida pārveidojumi - vienādojuma (matricas rindas) reizināšana ar nenulles elementu - Diofanta sistēmām var reizināt vai dalīt visus viena vienādojuma locekļus ar veseliem skaitļiem tā, lai rezultāti visi koeficienti ir veseli skaitļi,
3. 3.veida pārveidojumi - viena vienādojuma daudzkārtņa pieskaitīšana otram vienādojumam - Diofanta sistēmām var reizināt vienādojumus/rindas ar veseliem koeficientiem.

Var definēt arī analoģiskus pārveidojumu ar kolonnām - kolonnu elementāros pārveidojumus. Katrs kolonnu elementārais nozīmē pāreju uz jauniem nezināmajiem.

1.1.4. LVS ekvivalence un tās saistība ar elementārajiem pārveidojumiem

Divas LVS sauc par *ekvivalentām*, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas. Pamatidejas LVS risināšanā:

- pārveidot vienādojumus tā, lai jaunie vienādojumu būtu ērtāk risināmi,
- veikt nezināmo maiņas (substitūcijas) tā, lai attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem sistēma būtu ērtāk risināma, pēc tam pāriet atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

Abas idejas var tikt realizētas vienlaicīgi.

1.1. teorēma. Ja LVS L_2 var tikt iegūta no L_1 veicot galīgu skaitu rindu elementāru pārveidojumu, tad L_1 un L_2 ir ekvivalentas.

1.1.5. Matricas, matricas pakāpienveida forma

Par *matricu* sauc galīgu taisnstūrveida tabulu, kuras rūtiņās ir ierakstīti skaitļi vai citi objekti (kāda gredzena elementi), kurus var saskaitīt un reizināt savā starpā (piemēram, funkcijas).

Būtu jāzina:

1. matricu saskaitīšanas un reizināšana ar skaitli (gredzena elementu), šo operāciju īpašības,
2. matricu reizināšana, tās īpašības (asociativitāte, reizināšana ar vienības matricu, u.c.)
3. inversās matricas jēdziens,
4. LVS matricas pieraksts ($AX = B$).

Par matricas rindas *nuļļu indeksu* sauc nepārtrauktas nuļļu virknes garumu, kas sākas no rindas kreisās malas.

Matrica ir *pakāpienveida formā (row echelon form)*, ja tās rindu nuļļu indeksu virkne ir augoša. Citiem vārdiem sakot, šādai matricai nuļļu virknes, kas sākas rindas kreisajā malā, kļūst arvien garākas. Pakāpienveida matrica ir *reducētā pakāpienveida formā*, ja katrā rindā pirmais nenulles elements no kreisās malas ir vienāds ar 1. Šādas rūtiņas sauc par rindu *galvenajām rūtiņām*.

1.1.6. Kvadrātveida matricas determinants un tā pielietojumi

Būtu jāzina:

1. determinanta definīcija,
2. determinanta īpašības (rindu un kolonnu linearitāte, antisimetrija, multiplikativitāte, vienības matricas determinants, minors, algebriskais papildinājums),
3. determinanta aprēķināšanas metodes,
4. inversās matricas atrašana.

1.1.7. Matricas rindu un kolonnu elementāro pārveidojumu interpretācija ar matricu reizināšanas formālismu

Par *elementāro pārveidojumu matricām* sauksim matricas, kuras iegūst, pielietojot rindu vai kolonnu elementāros pārveidojumu vienības matricai E_n. Definēsim šādas elementāro pārveidojumu matricas:

1. pirmā veida elementārā pārveidojuma matrica S_{ij},
2. otrā veida elementārā pārveidojuma matrica $D_i(\lambda)$,
3. trešā veida rindu elementārā pārveidojuma matrica $R_{ij}(\lambda)$ un kolonnu elementārā pārveidojuma matrica $C_{ij}(\lambda)$ (var pierādīt, ka $R_{ij}(\lambda) = C_{ij}^T(\lambda)$).

1.1. piemērs.

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$R_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2. teorēma. Matricas A rindu/kolonnu elementārā pārveidojuma rezultāts ir vienāds ar TA/AT, kur T ir atbilstošā elementārā pārveidojuma matrica.

PIERĀDĪJUMS Katram pārveidojuma tipam tiek veikta tieša pārbaude.■

Ja ar matricu A tiek veikti vairāki pārveidojumi, tad to rezultāts ir vienāds ar A reizināšanu ar attiecīgajām elementāro pārveidojumu matricām no attiecīgās puses.

1.2. piemērs. Ja ar matricu A tiek veikta pārveidojumu virkne

$$(r_1, c_1, r_2, r_3, c_2)$$

ar matricām R_i un C_i, tad šīs pārveidojumu virknes rezultāts ir matrica

$$(R_3R_2R_1)A(C_1C_2).$$

1.3. teorēma. Matricas rindu/kolonnu elementāro pārveidojumu virknei $(t_1, ..., t_k)$ atbilstošā matrica T ir vienāda ar pārveidojumu virkne $(t_1, ..., t_k)$ pielietošanu vienības matricai.

PIERĀDĪJUMS Apskatīsim kolonnu elementāros pārveidojumus. Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru k - elementāro pārveidojumu skaitu.

Apgalvojums ir patiess, ja $k = 1$ - vienam elementāram pārveidojumam t atbilstošā elementārā matrica ir t pielietošana vienības matricai.

Pieņemsim, ka pēc i pārveidojumiem no pāra (A, E) ir iegūts pāris (A', U'), kur $A' = AU'$ un U' ir iegūta no vienības matricas ar visu i pielietošanu. Pielietosim vēl vienu elementāro pārveidojumu t ar matricu T:

1. no A' iegūsim $A'' = A'T = AU'T$,
2. no U' iegūsim $U'' = U'T$.

Redzam, ka $A'' = AU''$ un indukcijas solis ir pierādīts.■

1.1.8. Lineāru vienādojumu sistēmu nezināmo maiņas un to saistība ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem

LVS paplašinātās matricas rindu elementārie pārveidojumi nemaina nezināmos, mainās tikai vienādojumi.

Kolonnu elementāros pārveidojumus var interpretēt kā pārejas uz jauniem nezināmajiem: ja sākotnēji ir dota sistēma

$$AX = B$$

un V ir invertējama matrica, tad

$$AX = AEX = A(VV^{-1})X = (AV)(V^{-1}X) = B.$$

Esam ieguvuši jaunu sistēmu ar

- jaunu matricu AV (ko var interpretēt kā matricas A pārveidojumu ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem) un
- jauniem nezināmajiem $Y = V^{-1}X$.

Ievērosim, ka $X = EX = VV^{-1}X = V(V^{-1}Y) = VY$.

1.2. Gausa metode

Klasiskā Gausa metode LVS risināšanai sastāv no diviem soļiem:

1. LVS paplašinātās matricas pārveidošana pakāpienveida formā vai reducētā pakāpienveida formā,
2. nezināmo atrašana sākot no vienādojumiem ar mazāko nenulles koeficientu (sākot no beigām un ejot uz augšu).

Parasti Gausa metodē neizmanto kolonnu elementāros pārveidojumus (nezināmo maiņas).

Matricu formālisma terminos Gausa metodi var interpretēt šādi:

1. sākotnējā sistēma
$$AX = B$$
ar rindu pārveidojumiem (matricu reizināšanu no kreisās puses) tiek pārveidota par sistēmu
$$A'X = B',$$
kur A' ir matrica pakāpienveida formā,

2. sistēma $A'X = B$ tiek atrisināta attiecībā uz nezināmajiem X,

2. Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode

2.1. Metodes galvenie soļi

Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode sastāv no šādiem soļiem:

1. sistēmas paplašinātā matrica ar rindu un kolonnu elementārajiem pārveidojumiem tiek pārveidota noteiktā kanoniskā formā - *diagonālajā formā* (atšķirībā no Gausa metodes tiek izmantoti arī kolonnu (nezināmo) pārveidojumi, citiem vārdiem sakot, notiek pāreja uz jauniem nezināmajiem, šī iemesla dēļ tiek fiksēta kolonnu pārveidojumu vēsture),
2. jauniegūtā Diofanta sistēma tiek atrisināta attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem,
3. tiek veikta pāreja uz sākotnējiem nezināmajiem.

2.2. Palīgrezultāti

2.1. teorēma. Ja $n \times n$ matricai U ar veseliem elementiem

$$det(U) = \pm 1,$$

tad U^{-1} arī ir matrica ar veseliem elementiem.

PIERĀDĪJUMS $det(U) \neq 0$, tāpēc U^{-1} eksistē. Saskaņā ar inversās matricas atrašanas algoritmu matricas U^{-1} elementi ir matricas U elementu polinomiālas funkcijas dalītas ar $det(U)$, tāpēc tie visi ir veseli skaitļi.■

2.2. teorēma. Ja tiek veikta Diofanta sistēmas D_x (ar matricu A) nezināmo $x_1, ..., x_n$ maiņa ar lineāru pārveidojumu W, $det(W) = \pm 1$, kura rezultātā tiek iegūta jauna Diofanta sistēma D_y (ar matricu AW^{-1}) ar nezināmajiem $y_1, ..., y_n$, tad sistēmu D_x un D_y veselo atrisinājumu kopas ir saistītas ar bijektīviem pārveidojumiem W un W^{-1} (*nezināmo maiņa ar pārveidojumiem W un W^{-1} ir korekta*).

PIERĀDĪJUMS Ja matricai ar veseliem elementiem W izpildās $det(W) = \pm 1$, tad W^{-1} eksistē, tai ir veseli elementi un $det(W^{-1}) = det(W) = \pm 1$. Redzam, ka gan W, gan W^{-1} ir bijektīvas funkcijas.

Apzīmēsim ar x sākotnējo nezināmo vektoru-kolonnu, ar y pārveidoto nezināmo vektoru-kolonnu. Ja $y = Wx$, tad

$$W^{-1}y = W^{-1}Wx = E_n x = x.$$

Redzam, ka

1. ja x_0 ir vesels atrisinājums sistēmai D_x, tad Wx_0 ir vesels atrisinājums sistēmai D_y,
2. ja y_0 ir vesels atrisinājums sistēmai D_y, tad $W^{-1}x$ ir vesels atrisinājums sistēmai D_x.

Attēlojumi W un W^{-1} ir bijektīvi, tāpēc tie realizē veselo atrisinājumu kopu bijekcijas.■

2.3. teorēma. 1. un 3.veida elementāro pārveidojumu matricām determinanti pēc moduļa ir vienādi ar 1.

PIERĀDĪJUMS Tiek tieši atrasti matricu determinanti.■

2.4. teorēma. Ja matricai A tiek pielietota 1. un 3. veida pārveidojumu virkne, kurai atbilst matrica U, tad $det(U) = \pm 1$.

PIERĀDĪJUMS Tiek izmantota determinanta multiplikatīvā īpašība.■

2.3. Matricas pārveidošana diagonālajā formā

2.3.1. Algoritms

LDVS sistēmas paplašināto matricu var pārveidot diagonālajā formā saskaņā ar šādu algoritmu:

1. atrodam pēc moduļa mazāko nenulles elementu sistēmas matricā (bez brīvajiem locekļiem), pārvietojam to uz rūtiņu $(1, 1)$ ar pirmā veida elementārajiem pārveidojumiem, pieskaitām tā daudzkārtņus pirmajai rindai un pirmajai kolonnai tā, lai visur iegūtu pēc iespējas mazākus pēc moduļa elementus, ja nepieciešams, veicam otrā veida elementāros pārveidojumus, turpinām pārveidot pirmo rindu un pirmo kolonnu ar 1. un 3. veida pārveidojumiem tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā $(1, 1)$ un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes paplaši-

nātā matrica izskatās šādi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0...0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & ... & b_2 \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & a_{m2} & ... & b_m \end{bmatrix},$$

2. atrodam pēc moduļa mazāko elementu apakšmatricā, kuras augšējais kreisais stūris ir rūtiņa $(2, 2)$, atkārtojam 1.solī aprakstītās darbības ar šo apakšmatricu, turpinām pārveidot otro rindu un otro kolonnu tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā $(2, 2)$ un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes paplašinātā matrica izskatās šādi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0...0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0...0 & b_2 \\ 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_m \end{bmatrix},$$

... ...

Algoritms tiek uzskatīts par pabeigtu tad, kad sistēmas matrica (bez brīvajiem locekļiem) ir diagonālajā formā.

Atgādināsim, ka

- ar kolonnām var veikt tikai 1. veida pārveidojumus un 3.veida pārveidojumus ar veseliem reizinātājiem,
- ar rindām var veikt 1. veida pārveidojumus, 2.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi (reizināt ar veseliem koeficientiem un dalīt ar kopīgiem reizinātājiem) un 3.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi.

2.5. teorēma. Katrā algoritma solī rezultāts tiek panākts pēc galīga skaita elementāro pārveidojumu veikšanas (galīgā laikā).

PIERĀDĪJUMS 1. un 3. veida pārveidojumu rezultātā elements, kas atrodas augšējā kreisajā rūtiņā, paliek mazāks pēc katra 1. veida pārveidojuma.

2.1. piemērs. Atradīsim diagonālo formu matricai

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Veiksim šādu elementāro pārveidojumu virkni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.3.2. Nezināmo maiņas fiksēšana

Veicot elementāros pārveidojumus ar kolonnām, tiek veiktas nezināmo maiņas. Katram kolonnu elementārajam pārveidojumam t ar matricu T notiek pāreja no sākotnējiem nezināmajiem x uz jaunajiem nezināmajiem $T^{-1}x$.

Lai fiksētu visas nezināmo maiņas, ir ērti veikt elementāros pārveidojumus sākot nevis ar paplašināto matricu

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

bet ar matricu

$$\begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix}.$$

Ievērosim, ka tagad kolonnu pārveidojumi tiek automātiski fiksēti apakšmatricā, kas atrodas zem A. Visu pārveidojumu rezultātā iegūsim matricu

$$\begin{bmatrix} D & B' \\ U & 0 \end{bmatrix},$$

kur U ir pārejas matrica no sākotnējiem nezināmajiem uz jaunajiem nezināmajiem, attiecībā uz kuriem sistēmas paplašinātā matrica ir

$$\begin{bmatrix} D & B' \end{bmatrix}.$$

2.4. Jauno nezināmo atrašana

Iepriekšējā soļa rezultātā ir iegūta paplašinātā matrica

$$\begin{bmatrix} D & B' \end{bmatrix},$$

kur

$$D = diag(d_1, ..., d_r, 0, ..., 0)$$

un

$$B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ ... \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

Tai atbilst LDVS

$$\begin{cases} d_1 y_1 = b'_1 \\ d_2 y_2 = b'_2 \\ ... \\ d_m y_m = b'_m \end{cases}.$$

Šādai sistēmai eksistē vesels atrisinājums tad un tikai tad, ja visiem $i, 1 \le i \le m$, izpildās nosacījums

$$d_i | b_i'.$$

Tādējādi, ja $d_i = 0$, tad jābūt arī $b_i' = 0$, lai sistēmai būtu atrisinājums, šādā gadījumā y_i ir patvaļīgs.
Ja $m < n$, tad visiem $i, m+1 \le i \le n$ nezināmais y_i ir patvaļīgs.

Ja šis nosacījums izpildās, tad visiem $i, 1 \le i \le n$:

$$\begin{cases} y_i = \frac{b_i'}{d_i}, & \text{ja } d_i \ne 0, \\ y_i \text{ patvaļīgs}, & \text{ja } d_i = 0. \end{cases}$$

2.2. piemērs. Sistēmas

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

atrisinājums ir

$$(2, -2, y_3), \tag{1}$$

kur y_3 ir patvaļīgs vesels skaitlis.

2.5. Pāreja atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

Iepriekšējā solī esam atraduši nezināmo vektoru Y. Tā kā kolonnu elementāro pārveidojumu matrica ir U un $Y = U^{-1}X$, tad

$$X = UY = U \begin{bmatrix} b'_1/d_1 \\ b'_2/d_2 \\ \dots \\ b'_r/d_r \\ y_{r+1} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

2.3. piemērs. Ja

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ t \end{bmatrix}$$

un

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tad

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 + 2t \\ -2 + t \end{bmatrix}.$$

2.4. piemērs. Atrisināsim veselos skaitļos sistēmu

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 4z = 14 \end{cases}$$

Ar lineāro Diofanta vienādojumu sistēmām saistītas neatrisinātas problēmas: lineāro Diofanta vienādojumu sistēmas ir saistītas ar svarīgām neatrisinātām problēmām ķīmijā. Kompleksu ķīmisku reakciju sadalīšana elementārās reakcijās var tikt noformulēta LDVS terminos. Ir daudz šķietami vienkāršu un sen pētītu reakciju, kurām sadalījums elementārās reakcijās nav zināms. Interesenti var atrast informāciju internetā.

3. 3.mājasdarbs

1. Atrodiet elementāro matricu pārveidojumu determinantus un parādiet, ka 1. un 3. veida pārveidojumu matricu determinanti pēc moduļa ir vienādi ar 1.
2. Pierādiet, ka matricas reizināšana no kreisās (labās) puses ar elementāro pārveidojumu matricām realizē atbilstošos rindu (kolonnu) elementāros pārveidojumus (1.2.teorēma).
3. Pārveidojiet matricu

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

   diagonālajā formā, ar rindām veicot tikai pirmā un trešā veida pārveidojumus (ar kolonnām var veikt visu veidu elementāros pārveidojumus). Atrodiet kolonnu pārveidojumu matricu U.
4. Atrisiniet veselos skaitļos vienādojumus

a)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - t = a \\ 3x + 4y - z + 2t = 5 \end{cases},$$

kur $a \in \mathbb{Z}$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_1 = 3 \end{cases}.$$

5. Kādam cilvēkam ir 2000 lati. Viņš vai viņa vēlas iegādāties tieši 100 grāmatas. Ļoti laba grāmata maksā 50 latus gabalā, vidēji laba grāmata maksā 20 latus gabalā, lēta grāmata maksā 5 latus gabalā. Kādus grāmatu komplektus cilvēks var nopirkt?