*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Veselo skaitļu teorija

## 14.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2007./2008.studiju gads*

# Saturs

# 1. Skaitļu teorija un ģeometrija

## 1.1. Vienkārši rezultāti

### 1.1.1. Režģi

Punktu Dekarta koordinātu sistēmā (taisnē, plaknē, telpā) sauksim par *veselu punktu* ja tā koordinātes ir veseli skaitļi. Tādējādi ģeometriskajās telpā veselu punktu koordinātes ir veseli skaitļi, veselu skaitļu pāri vai trijnieki.

Visu virkņu $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, kopu sauc par $n$-dimensionālu telpu, apzīmē ar $\mathbb{R}^n$, $x_i$ sauc par koordinātēm. $n$-dimensionālas telpas elementu sauc par veselu punktu, ja visas koordinātes ir veseli skaitļi. Telpā $\mathbb{R}^n$ var definēt vektorus, operācijas ar vektoriem. Var definēt *mēru* - lielumu, kas vispārina laukumu un tilpumu. Ja paralēlskaldnis tiek konstruēts uz vektoriem $v_1, ..., v_n$ un $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in})$, tad tā mērs ir vienāds ar lieluma

$$\det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{12} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ v_{n1} & v_{n2} & ... & v_{nn} \end{bmatrix}$$

absolūto vērtību.

Veselu punktu kopā $\mathbb{R}^n$ sauc arī par *režğa punktu (lattice point)* un visu veselo punktu kopu - par *režği*, to apzīmē ar $\mathbb{Z}^n$. $\mathbb{Z}^2$ sauc arī par *kvadrātisku režği*, $\mathbb{Z}^3$ - par *kubisku režği*.

Vispārīgāk, par režği sauc arī punktu kopu formā

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n,$$

kur katram $i$ skaitlis $\lambda_i$ ir vesels skaitlis un vektori $v_1, ..., v_n$ (*režğa bāze*) ir lineāri neatkarīgi (veido lineārās telpas $\mathbb{R}^n$ bāzi). Dažādas bāzes var ğenerēt vienu un to pašu režği.

Divus punktus $x \in \mathbb{R}^n$ un $y \in \mathbb{R}^n$ sauksim par *salīdzināmiem (kongruentiem) attiecībā uz režģi* $\mathcal{R}$, ja

$$x - y \in \mathcal{R}.$$

Tā ir ekvivalences attiecība, kas sadala visu kopu $\mathbb{R}^n$ ekvivalences klasēs.

Par režģa $\mathcal{R}$ ar bāzi $v_1, ..., v_n$ fundamentālo apgabalu sauc kopu

$$\mathcal{D} = \{\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n | 0 \leq \alpha_i < 1\}.$$

Var redzēt, ka

- katrai punktu kongruences klasei ir pārstāvis kopā $\mathcal{D}$;
- kopas $\mathcal{D} + r$, $r \in \mathcal{R}$ pārklāj visu telpu $\mathbb{R}^n$.

Paralēlskaldņa tilpumu, kas ir uzbūvēts uz režģa bāzes tilpumu sauc par režģa *fundamentālo tilpumu*. Režģi, kas atbilst veseliem punktiem, sauc par *vienības režģi*. Vienības režģa fundamentālais tilpums ir vienāds ar 1.

**1.1. piezīme.** Režģis veido grupu attiecībā uz vektoru saskaitīšanas operāciju:

1. divu režģa vektoru summs ir režģa vektors;
2. 0 ir režģa elements;
3. ja $v$ ir režģa elements, tad $-v$ arī ir režģa elements.

**1.2. piezīme.** Kubiskos režģus plaši pielieto kristalogrāfijā.

**1.3. piezīme.** Veselo punktu skaits intervālā $[a, b]$ ir vienāds ar $[b-a]$.

**1.4. piezīme.** Veselo punktu skaits taisnstūrī ar virsotnēm $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(0, n)$, $(m, n)$ ir vienāds ar $(m+1)(n+1)$.

**1.5. piezīme.** Veselo punktu skaits līklīnijas trapecē $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ ir vienāds ar

$$\sum_{a \leq x \leq b, x \in \mathbb{Z}} \lceil f(x) \rceil = \sum_{a \leq x \leq b, x \in \mathbb{Z}} ([f(x)] + 1).$$

**1.1. teorēma.** Veselo punktu skaits riņķī $x^2 + y^2 \leq R^2$ ir vienāds ar

$$1 + 4[R] + 8 \sum_{0 < x \leq \frac{R}{\sqrt{2}}} [\sqrt{R^2 - x^2}] - 4[\frac{R}{\sqrt{2}}]^2.$$

### 1.1.2. Gausa un Eizenšteina skaitļi

Kompleksos skaitļus formā $x + iy$, kur $x \in \mathbb{Z}$ un $y \in \mathbb{Z}$, sauc par *Gausa skaitļiem* vai *Gausa veselajiem skaitļiem*. Gausa skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Z}[i]$. Redzam, ka $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$. Gausa skaitļus var domāt arī kā vektorus plaknē.

Par Gausa skaitļa $x + iy$ *normu* sauc lielumu
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)}.$$

Gausa skaitļu kopā var definēt dalāmību, pirmskaitļus. Piemēram, $2 \in \mathbb{Z}[i]$ nav pirmskaitlis, jo $2 = (1 + i)(1 - i)$.

**1.2. teorēma.**

1. Gausa skaitļi veido gredzenu attiecībā uz komplekso skaitļu saskaitīšanas un reizināšanas operācijām.
2. Gausa skaitļu gredzens nav lauks (skaitlim 2 nav inversā elementa).
3. $u \in \mathbb{Z}[i]$ ir invertējams tad un tikai tad, ja $u^2 = \pm 1$.
4. Gredzenā $\mathbb{Z}[i]$ nav nulles dalītāju.
5. Ja $a \in \mathbb{Z}[i]$, $b \in \mathbb{Z}[i]$ un $b \neq 0$, tad eksistē $q$ un $r$, tāds, ka $|r| < |b|$ un
$$a = qb + r.$$

PIERĀDĪJUMS 5. Vektori $b$ un $ib$ veido režģi $\mathcal{R}_b$. Ja $q = q' + iq''$, tad
$$qb = (q' + iq'')b = q'b + q''(ib) \in \mathcal{R}_b$$
un, otrādi, katrs $\mathcal{R}_b$ vektors ir izsakāms formā $q'''b$. Maksimālais attālums no $a$ līdz tuvākajam $\mathcal{R}_b$ punktam $b'$ nav lielāks kā $\frac{|b|}{\sqrt{2}}$, tāpēc eksistē $q$ tāds, ka $|a - qb| < |b|$. ■

Definēsim $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Citiem vārdiem sakot, $\omega$ ir viens no vienādojuma $z^3 = 1$ atrisinājumiem.

Kompleksos skaitļus formā $x + \omega y$, kur $x \in \mathbb{Z}$ un $y \in \mathbb{Z}$, sauc par *Eizenšteina skaitļiem*. Eizenšteina skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Z}[\omega]$. Redzam, ka $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\omega]$. Eizenšteina skaitļus var domāt arī kā vektorus plaknē.

Par Eizenšteina skaitļa $x + \omega y$ *normu* sauc lielumu

$$|x + \omega y| = \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

Eizenšteina skaitļu kopā var definēt dalāmību, pirmskaitļus. Piemēram, $3 \in \mathbb{Z}[\omega]$ nav pirmskaitlis, jo $3 = (2 + \omega)(1 - \omega)$. 7 nav pirmskaitlis, jo $7 = (1 - 2\omega)(3 + 2\omega)$.

**1.3. teorēma.**

1. Eizenšteina skaitļi veido gredzenu attiecībā uz komplekso skaitļu saskaitīšanas un reizināšanas operācijām.
2. Eizenšteina skaitļu gredzens nav lauks (skaitlim 2 nav inversā elementa).
3. $u \in \mathbb{Z}[\omega]$ ir invertējams tad un tikai tad, ja $u \in \{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$.
4. Gredzenā $\mathbb{Z}[\omega]$ nav nulles dalītāju.
5. Ja $a \in \mathbb{Z}[\omega]$, $b \in \mathbb{Z}[\omega]$ un $b \neq 0$, tad eksistē $q$ un $r$, tāds, ka $|r| < |b|$ un
$$a = qb + r.$$

PIERĀDĪJUMS ■

Var definēt *Kummera gredzenu* $\mathbb{Z}[\zeta_m]$, kur $\zeta_m = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

## 1.2. Klasiski rezultāti

### 1.2.1. Gausa riņķa problēma

Apzīmēsim ar $r_2(n)$ veidu skaitu kā $n$ ir iespējams izteikt divu veselu skaitļu kvadrātu sakārtotas summas veidā.

**1.1. piemērs.** $4 = (\pm 2)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 2)^2$, tāpēc $r_2(4) = 4$.

**1.4. teorēma.**

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} r_2(n) = \pi.$$

PIERĀDĪJUMS $r_2(n)$ ir veselo punktu skaits uz riņka līnijas $x^2 + y^2 = n$, $\sum_{n=0}^{N} r_2(n)$ ir veselo punktu skaits riņķī $R_N$, kuru nosaka nevienādība $x^2 + y^2 \leq N$.

Katram veselam punktam $P$ riņķī $R_N$ piekārtosim kvadrātu ar malas garumu 1, kura malas ir paralēlas koordinātu asīm, un kuram $P$ ir augšējais kreisais stūris. Šādu kvadrātu laukumu summa ir vienāda ar veselo punktu skaitu $\sum_{n=0}^{N} r_2(n)$. Jo lielāks ir $N$, jo tuvāka šī kvadrātu laukumu summa ir riņķa $R_N$ laukumam $\pi N$. Tātad pārejot uz robežu, kad $N \to \infty$, iegūsim

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} r_2(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi N}{N} = \pi.$$

■

### 1.2.2. Dirihlē dalītāju problēma

Apzīmēsim ar $d(n)$ naturāla skaitļa $n$ naturālo dalītāju skaitu.

Teiksim, ka $a_n = O(b_n)$, ja eksistē pozitīva konstante $c$ un vesels skaitlis $n_0$ tādi, ka

$$0 \leq a_n \leq cb_n$$

visiem $n > n_0$. Virkni $b_n$ sauksim par virknes $a_n$ *augšējo asimptotisko robežu.* Alternatīva definīcija: $a_n = O(b_n)$, ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

**1.5. teorēma.**

$$\sum_{n=0}^{N} d(n) = N \ln N + cN + O(\sqrt{N}).$$

PIERĀDĪJUMS $d(n)$ ir vienāds ar veselo punktu skaitu uz hiperbolas $xy = n$ vaļējā pirmajā kvadrantā. $\sum_{n=0}^{N} d(n)$ ir veselo punktu skaits vaļējā pirmajā kvadrantā, kas apmierina nevienādību $xy \leq N$. ■

### 1.2.3. Pika teorēma

**1.6. piezīme.** Ja $a$ un $b$ ir veseli skaitļi, tad nogriežņa $[a, b]$ garums $b - a$ ir vienāds ar $I + \frac{B}{2}$, kur $I$ ir nogriežņa iekšējo veselo punktu skaits, $B = 2$ ir galapunktu skaits. Šo formulu var pamatot tā, ka katrs iekšējs punkts "rada" ap sevi simetrisku nogriezni ar garumu 1, bet katrs galapunkts - tikai nogriezni ar garumu $\frac{1}{2}$.

**1.7. piezīme.** Taisnstūrim ar veselām virsotnēm $(a, b)$, $(a + u, b)$, $(a, b + v)$, $(a + u, b + v)$, laukums $uv$ ir vienāds ar $I + \frac{B}{2} - 1$. Redzam, ka $I = (u - 1)(v - 1)$ un $B = 2u + 2v$, tāpēc

$$I + \frac{B}{2} - 1 = uv - u - v + 1 + u + v - 1 = uv.$$

**1.6. teorēma.** (*Pika teorēma*) Ja $D$ ir plakans daudzstūris bez malu paškrustojumiem, kura virsotnes ir veseli punkti, $I$ ir $D$ iekšējo veselo punktu skaits, $B$ ir veselo punktu skaits uz $D$ robežas, tad $D$ laukums ir vienāds ar

$$I + \frac{B}{2} - 1$$

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar laukumu kā parametru. No sākuma pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess trijstūriem ar šādu soļu palīdzību:

1) pierādām, ka formula ir pareiza taisnstūriem, kuru malas ir paralēlas koordinātu asīm;
2) pierādām, ka formula ir pareiza taisnleņka trijstūriem, kuru katetes ir paralēlas koordinātu asīm;
3) pierādām, ka formula ir pareiza trijstūriem, kuru viena mala ir paralēla koordinātu asīm;
4) pierādām, ka formula ir pareiza visiem trijstūriem.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visiem daudzstūriem, kuru laukums ir mazāks kā $S$ un pierādīsim, ka tādā gadījumā tas ir patiess arī daudzstūriem ar laukumu $S$.

Pieņemsim, ka ir dots daudzstūris $D$ ar laukumu $S$, iekšējo veselo punktu skaitu $I$ un robežas veselo punktu skaitu $B$. Eksistē diagonāle, kas kopā ar divām malām veido trijstūri, tātad $D$ ir kāda daudzstūra $D'$ (ar laumu mazāku kā $S$) un trijstūra apvienojums. Daudzstūrim $D'$ Pika formula ir pareiza saskaņā ar indukcijas pieņēmumu, trijstūrim Pika formula ir spēkā. Pierādīsim, ka no šiem diviem faktiem seko Pika formulas pareizība daudzstūrim $D$.

Pieņemsim, ka $D'$ laukums ir $S'$, iekšējo veselo punktu skaits ir $I'$ un robežas veselo punktu skaits ir $B'$. Pieņemsim, ka trijstūrim laukums ir $S_T$, iekšējo veselo punktu skaits ir $I_T$ un robežas veselo punktu skaits ir $B_T$. Zinām, ka

$$S' = I' + \frac{B'}{2} - 1$$

un

$$S_T = I_T + \frac{B_T}{2} - 1.$$

Pieņemsim, ka veselo punktu skaits uz diagonāles, kas atdala $D'$ no trijstūra, ir vienāds ar $\delta$. Redzam, ka

$$I = I' + I_T + \delta - 2.$$

un

$$B = B' + B_T - 2\delta + 2.$$

Redzam,ka

$$S = S' + S_T = (I' + \frac{B'}{2} - 1) + (I_T + \frac{B_T}{2} - 1) =$$
$$(I' + I_T + \delta - 2) + (2 - \delta) - 1 + \frac{B' + B_T - 2\delta + 2}{2} + \frac{2\delta - 2}{2} - 1 =$$
$$I + \frac{B}{2} - 1.$$

■

**1.8. piezīme.** Pika teorēmu var vispārināt uz gadījumu, kad daudzstūrim ir "caurumi" ar veselām virsotnēm. Ja daudzstūrim ir $k$ "caurumi", tad tā laukums ir vienāds ar $I + \frac{B}{2} - 1 + k$.

### 1.2.4. Minkovska teorēma

Ģeometrisku figūru $F$ sauc par *centrāli simetrisku*, ja $(x, y) \in F$ tad un tikai tad, ja $(-x, -y) \in F$. Ģeometrisku figūru $F$ sauc par *izliektu*, ja no tā, ka $A \in F$ un $B \in F$ seko, ka $AB \subseteq F$.

**1.9. piezīme.** Taisnē centrāli simetrisks nogrieznis, kas ir garāks kā 2, satur nenulles veselu skaitli. Kvadrāts ar virsotnēm $(\pm 1, \pm 1)$ un laukumu 4 robežojas ar veseliem punktiem.

**1.7. teorēma.** (*Minkovska teorēma fundamentālajam režģim plaknē*) Katra izliekta un centrāli simetriska plaknes figūra $F$, kuras laukums $S$ ir lielāks kā 4, satur nenulles veselu punktu (punktu, kas nav $(0,0)$).

PIERĀDĪJUMS Katram naturālam $t$ apskatīsim taisnes $x = \frac{2a}{t}$ un $y = \frac{2b}{t}$, kur $a$ un $b$ ir veseli skaitļi. Šīs taisnes sadala plakni kvadrātos ar virsotnēm $(\frac{2a}{t}, \frac{2b}{t})$, malas garumu $\frac{2}{t}$ un laukumu $\frac{4}{t^2}$.

Apzīmēsim ar $C(t)$ kvadrātu virsotņu skaitu, kas pieder $F$. Redzam, ka

$$\lim_{t\to\infty} \frac{4}{t^2} C(t) = S,$$

jo katrai virsotnei atbilst tieši viens kvadrāts, kuram tā ir, piemēram, augšējais kreisais stūris un, ja $t$ ir liels, tas visi šādi kvadrāti, kas atbilst virsotnēm figūrā $F$, labi tuvina $S$.

Ja $S > 4$, tad $S = 4 + \sigma$, kur $\sigma > 0$, tāpēc

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} C(t) = 1 + \frac{\sigma}{4}$$

un visiem pietiekoši lieliem $t$ izpildās nosacījums

$$\frac{1}{t^2}C(t) > 1$$

jeb

$$C(t) > t^2$$

Dalot pāra $(a, b)$ elementus ar $t$, var iegūt ne vairāk kā $t^2$ atlikumu pārus, tāpēc eksistē divi skaitļu pāri - punkti $P_1 = (a_1, b_1)$ un $P_2 = (a_2, b_2)$, kuriem atlikumu pāri ir vienādi:

$$a_1 \equiv a_2 \pmod{t} \text{ un } b_1 \equiv b_2 \pmod{t}.$$

Nogriežņa $P_1P_2$ viduspunkts

$$(\frac{2a_2 - 2a_1}{2t}, \frac{2b_2 - 2b_1}{2t}) = (\frac{a_2 - a_1}{t}, \frac{b_2 - b_1}{t})$$

ir vesels punkts, kas pieder $F$. ■

**1.8. teorēma.** (*Minkovska teorēma fundamentālajam režģim telpā*) Katra izliekta un centrāli simetriska telpas figūra $F$, kuras tilpums $V$ ir lielāks kā 8, satur nenulles veselu punktu (punktu, kas nav $(0,0,0)$).

PIERĀDĪJUMS Līdzīgi plaknes gadījumam. ■

**1.10. piezīme.** Vispārīgā gadījumā Minkovska teorēma tiek formulēta šādi: ja telpā $\mathbb{R}^n$ ir dots režģis ar fundamentālo tilpumu $\mu$, tad katra izliekta un centrāli simetriska figūra $F$, kuras tilpums ir lielāks kā $2^n\mu$, satur nenulles veselu punktu.

**1.11. piezīme.** Izmantojot Minkovska teorēmu pierādīsim kādu klasisku rezultātu: naturālu skaitli $n$ var izteikt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu, ja $n$ pirmskaitļu pakāpju sadalījumā nav pirmskaitļu $p$ tādu, ka $p \equiv 3 \pmod 4$.

Izmantojot *Brahmaguptas-Fibonači identitāti*

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2 = (xz+yt)^2 + (xt-yz)^2$$

redzam, ka pietiek pierādīt, ka katru nepāra pirmskaitli $p$, kuram izpildās nosacījums $p \equiv 1 \pmod 4$.

Zinām, ka $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, tāpēc $-1$ ir kvadrātisks atlikums mod p tad un tikai tad, ja $p \equiv 1 \pmod 4$. Pieņemsim, ka

$$a^2 \equiv -1 \pmod{\mathrm{p}}.$$

Konstruēsim režģi $\mathcal{R}$ ar vektoriem $\overrightarrow{v}_1 = (a,1)$ un $\overrightarrow{v}_2 = (p,0)$. Tā fundamentālais tilpums ir vienāds ar

$$|\det \begin{bmatrix} a & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix}| = p.$$

Ja $(x, y) \in \mathcal{R}$, tad

$$(x, y) = n_1 \overrightarrow{v}_1 + n_2 \overrightarrow{v_2} = (n_1 a + n_2 p, n_1),$$

tāpēc

$$x^2 + y^2 = n_1^2 a^2 + 2 n_1 n_2 a p + n_2^2 p + n_1^2 \equiv n_1^2 (a^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Definēsim $F$ kā riņķi ar rādiusu $\sqrt{(2 - 0.1)p}$:

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.9p.$$

$F$ laukums ir vienāds ar $1.9\pi p > 5.6p > 4p$. Saskaņā ar Minkovska teorēmu $F$ satur režğa $\mathcal{R}$ nenulles punktu $(x_0, y_0)$. Zinām, ka $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \pmod{p}$ un $x_0^2 + y_0^2 > 0$. No otras puses $x_0^2 + y_0^2 \leq 1.9p$, tāpēc $x_0^2 + y_0^2 = p$.

# 2. Skaitļu teorijas slavenākās neatrisinātās problēmas

Vai eksistē bezgalīgi daudz dvīņu pirmskaitļu - $p$ un $p+2$?

Vai eksistē bezgalīgi daudz pirmskaitļu formā $a^2+1$?

Vai katru pāra skaitli, kas ir lielāks kā 2 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Goldbach hipotēze)

Vai funkcijai $f$, kas ir definēta ar sistēmu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ja } x \text{ ir pāra skaitlis,} \\ 3x+1, & \text{ja } x \text{ ir nepāra skaitlis,} \end{cases}$$

cikls $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to ...$ ir vienīgais? (Collatz problēma)

*Rīmaņa zeta-funkcija* $\zeta(z)$ tiek definēta šādi:

- ja $z = s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, tad

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s};$$

- pārējām $z \in \mathbb{C}$ vērtībām, izņemot $z = -1$ $\zeta(z)$ tiek iegūts izmantojot analītisko turpināšanu kompleksajā plaknē.

Naturāliem $s$ $\zeta(s)$ apmierina *Eilera reizinājuma formulu*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

kur $\mathbb{P}$ ir pirmskaitļu kopa.

Zeta-funkcijas nulles ($z : \zeta(z) = 0$):

- $z = -2k$, $k \in \mathbb{N}$;
- $0 < \mathcal{R}e(z) < 1$ - *kritiskā josla*.

*Rīmaņa hipotēze* - pierādīt, ka katrai nullei $s$ kritiskajā joslā

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}.$$

# 3. 14.mājasdarbs

14.1 Atrodiet veselo punktu skaitu šādās ģeometriskās figūrās:

(a) nogrieznī ar koordinātēm $(x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2\}$;
(b) trijstūrī ar virsotnēm $(x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$;
(c) četrstūrī ar virsotnēm $(x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$;
(d) nogrieznī ar koordinātēm $(x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2\}$;
(e) trijstūrī ar virsotnēm $(x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$;
(f) paralēlskaldnī ar virsotnēm $(a, b, c)$, $(a+u, b, c)$, $(a, b+v, c)$, $(a+u, b+v, c)$, $(a, b, c+w)$, $(a+u, b, c+w)$, $(a, b+v, c+w)$, $(a + u, b + v, c + w)$;
(g) tetraedrā ar virsotnēm $(x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

14.2 Kvadrāts ar izmēriem $n \times n$ tiek nejaušā veidā mests uz plakni ar Dekarta koordinātu sistēmu. Pierādīts, ka tas nevar nosegt vairāk kā $(n + 1)^2$ veselus punktus.

14.3 Atrodiet Eizenšteina skaitļiem atbilstošā režģa fundamentālo apgabalu un tā laukumu.

14.4 Izmantojot Minkovska teorēmu pierādīt, ka

(a) Nepāra pirmskaitli $p$ var izteikt formā $x^2 + 2y^2$, ja $p \in \{1, 3\} \pmod 8$.

(b) Nepāra pirmskaitli $p$ var izteikt formā $x^2+xy+y^2$, ja $p = 3$ vai $p \equiv 1 \pmod 3$.

14.5 Dots izliekts piecstūris ar veselām virsotnēm. Tā diagonāļu krustpunkti ir mazāka piecstūra virsotnes. Pierādīt, ka mazākajā piecstūrī vai uz tā robežas atrodas vesels punkts.