DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

SKAITĻU TEORIJA

13.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt ķēžu daļu teorijas pamatus un vienkāršākos lietojumus

Lekcijas kopsavilkums:

- reālos skaitļus var tuvināti uzdot ar veselu skaitļu virknes - ķēžu daļas palīdzību,
- ķēžu daļām piemīt svarīgas īpašības, kas ļauj tās izmantot tuvināšanas un citos uzdevumos.

Svarīgākie jēdzieni: galīgās un bezgalīgās ķēžu daļas (ĶD), ĶD konverğentes un atlikumi, labs tuvinājums.

Svarīgākie fakti un metodes: racionālu un iracionālu skaitļu izteikšana ĶD veidā, konverğenšu īpašības, labākās tuvināšanas īpašības.

1. Ķēžu daļas

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Motivācija - reālu skaitļu tuvināšana ar racionāliem skaitļiem

Racionālo skaitļu blīvums

Racionālie skaitļi ir labi, lai tos izmantotu patvaļīgu reālu skaitļu tuvināšanai tāpēc, ka:

- racionāls skaitlis ir 2 veselu skaitļu pāris $\frac{x}{y} \longrightarrow (x, y)$;
- racionālie skaitļi ir izvietoti *blīvi* reālo skaitļu kopā:

  $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \epsilon.$$

Iespējamais apzīmējums: $\alpha \approx \frac{x}{y}$, kļūda - ϵ.

Mazi saucēji

Strādājot ar reāliem skaitļiem, ir vēlams tos pēc iespējas labāk tuvināt ar racionāliem skaitļiem $\frac{x}{y}$, kuriem saucējs y ir pēc iespējas mazāks. Tas ir vēlams tāpēc, ka lieli saucēji rada lielas noapaļošanas kļūdas.

1.1.2. Tuvināšanas mēģinājums

1.1. piemērs. Mēģināsim tuvināt skaitli $\frac{43}{19}$ ar racionāliem skaitļiem, kuriem ir mazāki saucēji, pakāpeniski palielinot saucējus.

1. $\frac{43}{19} = 2 + \frac{5}{19} \approx 2$, kļūda: $\left|\frac{43}{19} - 2\right| \approx 0.26315$ ($\approx 11.6\%$);

2. $$\frac{43}{19} = 2 + \frac{5}{19} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{19}{5}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}} \approx 2 + \frac{1}{3+0} \approx \frac{7}{3},$$

   kļūda: $\left|\frac{43}{19} - \frac{7}{3}\right| \approx 0.07017$ ($\approx 3.1\%$);

3. $$\frac{43}{19} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\left(\cfrac{5}{4}\right)}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} \approx 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1+0}} \approx$$

   $$\approx \frac{9}{4},$$

   kļūda: $\left|\frac{43}{19} - \frac{9}{4}\right| \approx 0.01315$ (≈ 0.58);

4. $$\frac{43}{19} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{43}{19}.$$

1.2. piemērs. Mēğināsim tuvināt skaitli

$$\pi = 3.14159265358979323846264...$$

ar racionāliem skaitļiem, pakāpeniski palielinot saucējus.

1. $\pi = 3 + 0.1415926... \approx 3$,
   kļūda: $|\pi - 3| \approx 0.1415926$ ($\approx 4.51\%$);
2. $\pi = 3 + 0.1415926... = 3 + \dfrac{1}{7 + 0.0635...} \approx 3 + \dfrac{1}{7+0} = \dfrac{22}{7}$,
   kļūda: $\left|\pi - \dfrac{22}{7}\right| \approx 0.00126$ ($\approx 0.04\%$);
3. $\pi = 3 + \dfrac{1}{7 + 0.06351} = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + 0.996...}} \approx 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15}} = \dfrac{333}{106}$,
   kļūda: $\left|\pi - \dfrac{333}{106}\right| \approx 0.0000832$ ($\approx 0.0026\%$);

4. $$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0.996...}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0.0034...}}} \approx$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113},$$

kļūda: $\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 0.000000266$ ($\approx 0.000008\%$).

1.1.3. Definīcijas

Par galīgai reālo skaitļu virknei $(a_1, ..., a_n)$ atbilstošo *ķēžu daļu (ĶD)* sauksim skaitli

$$\underbrace{[a_1, a_2, ..., a_n]}_{\text{apzīmējums}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + ...}}} = \frac{P(a_1, ..., a_n)}{Q(a_1, ..., a_n)}.$$

Redzam, ka

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = a_1 + \frac{1}{[a_2, ..., a_n]} = [a_1, a_2, ..., a_{n-1} + \frac{1}{a_n}].$$

Var apskatīt speciālgadījumus, ja skaitļi ir pozitīvi, veseli, naturāli u.c.

Par bezgalīgai reālo skaitļu virknei $(a_1, a_2, ...)$ atbilstošo ĶD sauksim izteiksmi

$$\lim_{n\to\infty}[a_1, a_2, ..., a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + ...}}}$$

ĶD $[a_1, a_2, ...]$ var definēt divas ar to saistītas ĶD:

- *n-to konverğenti ($n \geq 1$)* - $\delta_n = [a_1, a_2, ..., a_n]$,
- *m-to atlikumu ($m \geq 1$)* - $\rho_n = [a_m, a_{m+1}, ...]$.

Var redzēt, ka $[a_1, a_2, ...] = [a_1, a_2, ..., a_n, \rho_{n+1}]$.

1.1. piezīme. Ķēžu daļas var vispārināt daudzos veidos, piemēram, tuvinot izvēlēties tuvāko veselo skaitli, nevis veselo daļu.

1.2. Skaitļu izteikšana ķēžu daļu formā

1.2.1. Racionālie skaitļi

1.1. teorēma. $a, b \in \mathbb{N}$. Tad

$$\frac{a}{b} = [q_1, ..., q_n],$$

kur $q_1, ..., q_n$ ir Eiklīda algoritmā iegūtie dalījumi, $q_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q_i \in \mathbb{N}$, ja $i > 1$.

PIERĀDĪJUMS Pārveidosim daļu $\frac{a}{b}$ izmantojot Eiklīda algoritma un ĶD apzīmējumus:

$$\frac{a}{b} = \frac{q_1 b + r_1}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r_1}\right)} = q_1 + \frac{1}{\frac{q_2 r_1 + r_2}{r_1}} =$$

$$= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}} = ...$$

Lai formāli pabeigtu pierādījumu, ir jāizmanto matemātiskās indukcijas metode ar parametru n.$\blacksquare$

1.2. teorēma. $\forall\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ \frac{a}{b} > 0$, var tikt izteikts kā galīga ĶD $[q_1, ..., q_n]$ tieši vienā veidā, ja $q_1 \geq 0$, $q_i > 0$, $\forall\ i > 1$, $q_n \geq 2$.

PIERĀDĪJUMS
$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z} \implies \frac{a}{b}$ var viennozīmīgi izteikt formā $q_1 + \frac{r_1}{b}$.

Turpinot šo spriedumu, var secināt, ka skaitlim $\frac{a}{b}$ atbilstošajā Eiklīda reprezentācijā $[q_1, ..., q_n]$ visi elementi ir noteikti viennozīmīgi.

$q_n = 1 \implies$ pārveidosim ĶD izmantojot identitāti

$$[q_1, ..., q_{n-1}, 1] = [q_1, ..., \underbrace{q_{n-1} + 1}_{\geq 2}].\blacksquare$$

1.2.2. Iracionālie skaitļi

1.3. teorēma. Katru iracionālu pozitīvu skaitli var izteikt bezgalīgas NĶD veidā.

PIERĀDĪJUMS Aprakstīsim algoritmu, ar kuru pozitīvam iracionālam skaitlim x var atrast atbilstošo NĶD $[a_1, a_2, ...]$. Acīmredzami $a_1 = [x]$.

$$x = a_1 + x_1 = a_1 + \frac{1}{[a_2, a_3, ...]} \Longrightarrow a_2 = \left[\frac{1}{x - a_1}\right].$$

$$\text{Apzīmēsim} \begin{cases} a_i = [x_{i-1}] \\ x_i = \dfrac{1}{x_{i-1} - a_i} \end{cases}$$

Ar šīs sistēmas palīdzību var atrast x ĶD. Jāpierāda, ka konverğenšu robeža ir vienāda ar x. ■

1.2. piezīme. Reālo skaitļu uzdošana ar ĶD palīdzību ir vēl viens veids, ka kodēt reālos skaitļus ar veselajiem skaitļiem. Tas nav atkarīgs no parametriem kā, piemēram, pozicionālais pieraksts.

1.3. Ķēžu daļu svarīgākās īpašības

1.3.1. Labākās tuvināšanas īpašība

$a \in \mathbb{R}$. $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{Q}$, $Q > 0$, sauc par a *labu tuvinājumu*, ja

$$\begin{cases} 0 < q \le Q \\ \dfrac{p}{q} \ne \dfrac{P}{Q} \end{cases} \Longrightarrow |Qa - P| < |qa - p|.$$

1.3. piezīme. $\Longrightarrow$ $\left|a - \dfrac{P}{Q}\right| < \dfrac{q}{Q}\left|a - \dfrac{p}{q}\right|$ $\Longrightarrow$

$\left|a - \dfrac{P}{Q}\right| < \left|a - \dfrac{p}{q}\right|$ $\Longrightarrow$ labs tuvinājums ir a tuvākais racionālais skaitlis, kura saucējs nepārsniedz Q.

1.4. piezīme. Laba tuvinājuma interpretācija:

- $|Qa - P|$ - attālums no Qa līdz veselam skaitlim P,
- $|qa - p|$ - līdzīgi,

- $\dfrac{P}{Q}$ - labs tuvinājums, ja Qa ir tuvāk veselam skaitlim nekā $\forall\ qa$ ar $0 < q < Q$.

1.4. teorēma. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Tad

$$\delta \text{ ir } a \text{ labs tuvinājums} \implies \delta \text{ ir } a \text{ NĶD konverǧente.}$$

PIERĀDĪJUMS Papildmateriālā. ■

1.5. teorēma. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a = [a_1, ...]$, $a \neq a_1 + \dfrac{1}{2}$. Tad

$$\delta \text{ ir } a \text{ NĶD konverǧente} \implies \delta \text{ ir } a \text{ labs tuvinājums.}$$

PIERĀDĪJUMS Papildmateriālā. ■

1.6. teorēma. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $LKD(p, q) = 1$. Tad

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2} \implies \frac{p}{q} \text{ ir } a \text{ NĶD konverģente.}$$

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka $\frac{p}{q}$ ir a labs tuvinājums, tad rezultāts sekos no iepriekšējās teorēmas. Pierādījums papildfailā. ■

2. 13.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

13.1 Atrast doto racionālo skaitļu ķēžu daļas un konverğentes.

(a) $\frac{11}{7}$,

(b) $\frac{101}{93}$.

13.2 Atrast doto reālo skaitļu a ķēžu daļu pirmos l locekļus, konverğentes δ_n, $1 \leq n \leq l$, un katras konverğentes kļūdu $|a - \delta_n|$.

(a) $a = \sqrt{2}$, $l = 5$,

(b) $a = \sqrt[3]{2}$, $l = 5$.

13.3 Atrodiet visus doto skaitļu a labos tuvinājumus $\frac{p}{q}$, $q < N$.

(a) $a = \frac{123456}{654321}$, $N = 5000$.

(b) $a = \dfrac{\pi^2}{6}$, $N = 1000$.
(c) $a = \sin 1$ (arguments radiānos), $N = 1000$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

13.4 $a = [a_1, a_2, ...]$ - NĶD, $n \geq 2$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{Q_n(Q_{n+1} + Q_n)} < |a - \delta_n|.$$

13.5 Vispāriniet ķēžu daļu teoriju šādos veidos

(a) aizvietojot veselās daļas operāciju ($x = [x] + \dfrac{1}{a + ...}$) ar tuvākā veselā skaitļa operāciju ($x = Round(x) \pm \dfrac{1}{a \pm ...}$)
(b) komplekso skaitļu laukā,
(c) gredzenā, kurā ir spēkā Eiklīda algoritms.

13.6 Definēsim

$$\mathbf{C}(a_1, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{E}_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}_{i,i+1} + \sum_{j=2}^{n} (-1) \mathbf{E}_{j,j-1} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{bmatrix}$$

Pierādīt, ka $\det \mathbf{C}(a_1, ..., a_n) = [a_1, ..., a_n]$.