DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

SKAITĻU TEORIJA

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt Diofanta vienādojumu risināšana elementārās metodes,
- atkārtot lineāru Diofanta vienādojumu risināšanu.

Lekcijas kopsavilkums:

- Diofanta vienādojumus var mēğināt risināt ar vairākām elementārām metodēm, kurās tiek izmantoti skaitļu teorijas pamatfakti,
- lineārus Diofanta vienādojumus var atrisināt līdz galam ar noteiktu algoritmu palīdzību.

Svarīgākie jēdzieni: Diofanta vienādojumi, lineāri Diofanta vienādojumi, Frobeniusa robeža.

Svarīgākie fakti un metodes: Diofanta vienādojumu ekvivalentie pārveidojumi, faktorizācijas metode, nezināmo ierobežošanas metode, parametriskā metode, modulārās aritmētikas metode, bezgalīgā kritiena metode, lineāru homogēnu Diofanta vienādojumu ar diviem nezināmajiem risināšana, lineāru nehomogēnu Diofanta vienādojumu ar diviem nezināmajiem risināšana, lineāru Diofanta vienādojumu ar jebkuru nezināmo skaitu risināšana, Frobeniusa robeža divu nezināmo gadījumā.

1. Vienādojumu risināšana veselos skaitļos

1.1. Ievads

1.1.1. Pamatfakti

Definīcijas

Vienādojumu $F(x_1, ..., x_n) = 0$ sauc par *Diofanta vienādojumu*, ja

- funkcijas F parametri ir veseli skaitļi un
- atrisinājumi tiek meklēti kopā $\mathbb{Z}$.

Biežāk izplatītie Diofanta vienādojumi ir

- polinomiālie,
- racionālie,
- eksponenciālie.

Diofanta vienādojumus var apvienot *Diofanta vienādojumu sistēmās.*

Ģeometriskā interpretācija

Diofanta vienādojumu atrisinājumus var interpretēt kā punktus ar veselām Dekarta koordinātēm, kas apmierina doto vienādojumu.

Pamatproblēmas

Attiecībā uz Diofanta vienādojumiem var risināt vismaz šādas problēmas:

1. noteikt, vai dotajam vienādojumam eksistē vismaz viens vesels atrisinājums, konstruktīvi vai nekonstruktīvi,
2. atrast visus dotā vienādojuma veselos atrisinājumus, vairāk vai mazāk konstruktīvi un/vai aprakstoši,
3. saskaitīt atrisinājumus ar dotiem ierobežojumiem (kādā apgabalā).

1.1.2. Ekvivalentie pārveidojumi

Diofanta vienādojumu ekvivalentie pārveidojumi:

1. pieskaitīt vienādojuma abām pusēm vienu un to pašu $a \in \mathbb{Z}$;
2. reizināt abas puses ar vienu un to pašu $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$;
3. ja katrs polinoma koeficients dalās ar d, tad izdalīt visus koeficientus ar d.
4. veikt nezināmo substitūciju $\mathbf{x} \dashrightarrow \mathbf{y}$, kur $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}, \\ \mathbf{U} \in \mathcal{M}at(n, n, \mathbb{Z}), \\ \det \mathbf{U} = \pm 1. \end{cases}$$

.

1.2. Diofanta vienādojumu risināšanas metodes

1.2.1. Faktorizācijas metode

Vienādojums $F(x_1,...,x_n)=0$ tiek pārveidots formā

- $f_1\cdot...\cdot f_m=g_1\cdot...\cdot g_l$, kur f_i,g_i ir funkcijas no $x_1,...,x_n$,- vispārīgā gadījumā,
- $f_1\cdot...\cdot f_m=c=p_1^{\alpha_1}...p_l^{\alpha_l}$- speciālgadījumā.

Izmantojot dalāmības, LKD un faktorizāciju pirmskaitļu pakāpju reizinājumā, tiek izdarīti secinājumi.

1.1. piemērs. $2x^2+5xy+3y^2-24=0$. Pārveidosim formā

$$(x+y)(2x+3y)=24.$$

Var redzēt vienu atrisinājumu $x=1$, $y=2$. Var būt arī citi. Jāapskata visas iespējamās vienādojumu sistēmas formā

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x+3y=b, \\ ab=24. \end{cases}$$

1.2.2. Nezināmo ierobežošanas metode

Izmantojot pārveidojumus un nevienādības, var mēģināt meklēt ierobežojumus nezināmo vērtībām galīgu intervālu veidā, pēc tam atliek pārlasīt galīgu iespēju kopu.

1.2. piemērs. $x^2 - xy + y^2 - x + y - 1 = 0$. Pārveidosim formā

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Iegūsim ierobežojumus

$$\begin{cases} |x-y| \le 2, \\ |x-1| \le 2, \\ |y+1| \le 2. \end{cases}$$

Pārskaitot iegūsim 3 atrisinājumus $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

1.2.3. Parametriskā metode

Dots vienādojums $F(x_1, ..., x_n) = 0$. Nezināmos x_i var

- mēģināt izteikt kā funkcijas no parametriem: $x_i = \varphi_i(y_1, ..., y_l)$,
- veikt nezināmo substitūcijas.

Dažreiz izmantojot nezināmo parametrisko uzdošanu, var pierādīt, ka vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

1.3. piemērs. $x^n + y^n = z^{n-1}$. Var uzminēt, ka bezgalīga atrisinājumu virkne tiek uzdota šādā parametriskā veidā:

$$\begin{cases} x = t(t^n + 1)^{n-2}, \\ y = (t^n + 1)^{n-2}, \\ z = (t^n + 1)^{n-1}. \end{cases}$$

1.2.4. Modulārās aritmētikas izmantošana

Vienādojums $F(x_1, ..., x_n) = 0$ risināts mod m vienam vai vairākiem m, tiek veikti secinājumi:

- ja neeksistē atrisinājums kādam m, tad neeksistē arī veselie atrisinājumu,
- ja ir iegūti lokālie atrisinājumi, no tiem var mēğināt iegūt globālos (veselos) atrisinājumus izmantojot ĶAT un nezināmo ierobežojumus,
- var mēğināt izmantot atlikumu aditīvās vai multiplikatīvās grupas struktūru,
- var iegūt arī citus secinājumus par veseliem atrisinājumiem.

1.2.5. Bezgalīgās nolaišanās metode

Diofanta vienādojumu atrisinājumu neeksistenci var mēğināt pierādīt ar šādu metodi:

1. Pieņemam, ka $\exists$ "mazākais" atrisinājums $(x_1, ..., x_n)$.

2. Pierādām, ka tad eksistē "vēl mazāks" atrisinājums $(x_1', ..., x_n')$ - pretruna.

1.4. piemērs. Atrisināsim vienādojumu $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$. Pietiek apskatīt tikai nenegatīvos arisinājumus. Pieņemsim, ka $\exists$ atrisinājums (x, y, z, t), kuram $x > 0$ vai $y > 0$, apskatīsim atrisinājumu ar mazāko $x \neq 0$ vai $y \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = 3x' \\ y = 3y' \end{cases} \Longrightarrow 9(x_1^2 + y_1^2) = 3(z^2 + t^2) \Longleftrightarrow 3(x_1^2 + y_1^2) = z^2 + t^2$$
$$z \equiv t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 3z_1 \\ t = 3t_1 \end{cases} \Longrightarrow 3(x_1^2 + y_1^2) = 9(z_1^2 + t_1^2)$$
$\Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 3(z_1^2 + t_1^2)$. Esam ieguvuši vienādojuma atrisinājumu (x_1, y_1, z_1, t_1), kuram $x_1 < x$ vai $y_1 < y$ - pretruna.

2. Lineārie Diofanta vienādojumi

2.1. Homogēns vienādojums ar diviem nezināmajiem

2.1. teorēma. Jebkurš Diofanta vienādojuma

$$ax + by = 0$$

atrisinājums $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ir izsakāms formā

$$\begin{cases} x = \left(\frac{b}{d}\right)t \\ y = -\left(\frac{a}{d}\right)t, \end{cases} \quad \text{kur } d = LKD(a, b), t \in \mathbb{Z}.$$

PIERĀDĪJUMS

$$\Big(ax = -by\Big) \iff \Big(\frac{a}{d}x = -\frac{b}{d}y\Big).$$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{d} \Big| \dfrac{a}{d}x \\ LKD\left(\dfrac{b}{d}, \dfrac{a}{d}\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \ \frac{b}{d}\Big| x \ \Longrightarrow \ x = \left(\frac{b}{d}\right)t, \ \text{kur } t \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow \ y = -\left(\frac{a}{d}\right)t. \ \blacksquare$$

2.1. piezīme. Var no sākuma uzreiz izdalīt ar $LKD(a, b)$.

2.1. piemērs. $4x + 6y = 0$, $d = 2$, $\forall$ skaitļu pāris $(3t, -2t), t \in \mathbb{Z}$, ir atrisinājums.

$12x - 24y = 0$, $d = 12$, $\forall$ skaitļu pāris $(2t, t), t \in \mathbb{Z}$, ir atrisinājums.

2.2. Nehomogēns vienādojums ar diviem nezināmajiem

2.2. teorēma. $d = LKD(a_1, ..., a_n)$. Diofanta vienādojumam

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$$

$\exists$ atrisinājums $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \iff d\Big|c$.

PIERĀDĪJUMS $d|a_i, \forall\ i \implies$

$$d\Big|\underbrace{(a_1x_1 + ... + a_nx_n)}_{=c}, \forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Esam pierādījuši: $\Big($ vienādojumam $a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$ ir vesels atrisinājums $\Big) \implies \Big(d\Big|c\Big)$.

Implikācija otrā virzienā. $d|c \implies \exists\ \{q, x_1', ..., x_n'\} \subseteq \mathbb{Z}:$

$$c = qd = q\underbrace{(a_1x'_1 + ... + a_nx'_n)}_{=d}$$

(d var izteikt kā kopas $\{a_1, ..., a_n\}$ elementu veselu lineāru kombināciju ar koeficientiem x'_i). $\Longrightarrow$

$$c = q(a_1x'_1 + ... + a_nx'_n) = a_1(qx'_1) + a_2(qx'_2) + ... + a_n(qx'_n)$$

un par veselu atrisinājumu var izvēlēties virkni

$$\begin{cases} x_1 = qx'_1, \\ ..., \\ x_n = qx'_n. \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.2. piemērs. Vienādojumam $4x + 6y = 5$ nav veselu atrisinājumu, jo $2 \nmid 5$.

2.3. teorēma. $d = LKD(a,b)$, $d\,\big|\,c$. Jebkurš Diofanta vienādojuma

$$ax + by = c$$

atrisinājums ir izsakāms formā

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(\dfrac{b}{d}\right)t \\ y = y_0 - \left(\dfrac{a}{d}\right)t \end{cases}$$ kur (x_0, y_0) ir fiksēts atrisinājums un $t \in \mathbb{Z}$.

PIERĀDĪJUMS Jebkurš veselu skaitļu pāris

$$\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right)$$

ir nehomogēnā vienādojuma atrisinājums, jo

$$a\left(x_0+\frac{b}{d}\,t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}\,t\right) = \left(ax_0+by_0\right)+\left(a\frac{b}{d}\,t+b(-\frac{a}{d})\,t\right) = c+0 = c$$

No otras puses, ja skaitļu pāris (x, y) ir nehomogēnā vienādojuma atrisinājums, tad

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=(ax+by)-(ax_0+by_0)=c-c=0,$$

tāpēc $(x-x_0, y-y_0)$ ir homogēnā vienādojuma atrisinājums un ir izsakāms formā $\left(\frac{b}{d}\,t, -\frac{a}{d}\,t\right)$. ■

2.2. piezīme. Seko, ka x un y pieder noteiktām atlikumu klasēm:

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \left(\bmod\ \frac{b}{d}\right) \\ y \equiv y_0 \left(\bmod\ \frac{a}{d}\right) \end{cases}$$

2.3. piezīme. Nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu (x_0, y_0) var atrast izmantojot LKD lineārās kombinācijas īpašību šādā veidā.

$$\begin{cases} ax_0+by_0=c \\ d|c \implies c=td \\ d=x'a+y'b \end{cases} \implies c=td=t\underbrace{(x'a+y'b)}_{=d}=a(tx')+b(ty')$$

$$\implies \text{varam ņemt} \begin{cases} x_0=tx' \\ y_0=ty' \end{cases}.$$

2.3. piemērs. $4x + 6y = 8$. $d = 2 = (-1)\cdot 4 + 1 \cdot 6 \implies (x_0, y_0) = (-4, 4)$ ir vienādojuma atrisinājums $\implies$ vienādojuma atrisinājumu kopa ir $\{(-4+3t, 4-2t) \big| t \in \mathbb{Z}\}$.

2.3. Lineārs vienādojums ar patvaļīgu nezināmo skaitu

Lineāru vienādojumu ar vairāk kā diviem nezināmajiem var risināt vairākos soļos, katrā solī risinot vienādojumu ar diviem nezināmajiem.

2.4. piemērs. $4x + 6y + 3z = 8 \iff 4x + 6y = 8 - 3z \implies z = 2z'$

$$8 - 6z' = 2(4 - 3z') = (4 - 3z')(-4 + 6) = 4(-4 + 3z') + 6(4 - 3z)$$

$$\implies \begin{cases} x = 3t - 4 + 3z', \\ y = -2t + 4 - 3z', \\ z = 2z'. \end{cases}$$

Lineāra vienādojuma $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = c$ risināšanas algoritms:

1. Definēt $a_1 x_1 + ... + a_{n-1} x_{n-1} = d_{n-1} u_{n-1}$, kur $d_{n-1} = LKD(a_1, ...$ $..., a_{n-1})$, u_{n-1} - jauns nezināmais.
2. Atrisināt vienādojumu $d_{n-1} u_{n-1} + a_n x_n = c$ attiecībā uz u_{n-1} un x_n:
$$\begin{cases} u_{n-1} = u'_{n-1} t_n + u_0 \\ x_n = x'_n t_n + z_0. \end{cases}$$
3. Rekursīvi (atgriežoties uz 1)) atrisināt vienādojumu $a_1 x_1 + ... + a_{n-1} x_{n-1} = d u_{n-1}$ attiecībā uz $x_1, ..., x_{n-1}$.

3. 12.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Atrisināt nenegatīvos skaitļos ar faktorizācijas metodi:

(a) $x^3 - 14x^2 + 48x = 3^y$,

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{35}$

(*Norādījums: pārveidot formā* $(x-a)(y-b) = c$).

12.2 Atrisināt ar bezgalīgās nolaišanās metodes izmantošanu:

$$x^3 + 3y^3 = 9z^3.$$

12.3 Atrast visus veselos atrisinājumus:

a) $5x + 3y = 15$,

b) $8x - 6y = 10$,

c) $nx + (2n+1)y = 2, n \in \mathbb{N}$.

12.4 Atrast visus veselos atrisinājumus:

(a) $2x - 3y + z = 9$,

(b) $3x + 2y + 10z = -4$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.5 Pierādīt, ka to c naturālo vērtību skaits, ar kurām vienādojumam $ax + by = c$, $LKD(a, b) = 1$, nav nenegatīvu atrisinājumu, ir vienāds ar $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$.

12.6 (Erdoša-Strausa problēma) Pierādīt, ka $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, vienādojumam $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ $\exists$ naturāli atrisinājumi x, y, z.