DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

14.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt metodi lineāru Diofanta vienādojumu sistēmu (LDVS) risināšanai veselos skaitļos.

Lekcijas kopsavilkums:

- LDVS var atrisināt izmantojot rindu un kolonnu elementāros pārveidojumu un matricu formālismu.

Svarīgākie jēdzieni: veselas matricas diagonālā forma,

Svarīgākie fakti un metodes: LDVS risināšanas algoritma apraksts, kolonnu elementāro pārveidojumu un nezināmo substitūciju īpašības, algoritms LDVS paplašinātās matricas pārveidošanai diagonālajā formā, kolonnu elementāro pārveidojumu secības fiksēšana, diagonālas LDVS risināšana, pāreja uz sākotnējiem nezināmajiem.

1. Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode

1.1. Metodes galvenie soļi

Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode sastāv no šādiem soļiem:

1. sistēmas paplašinātā matrica ar rindu un kolonnu elementārajiem pārveidojumiem tiek pārveidota noteiktā kanoniskā formā - *diagonālajā formā*, atšķirībā no Gausa metodes tiek izmantoti arī kolonnu (nezināmo) pārveidojumi, citiem vārdiem sakot, notiek pāreja uz jauniem nezināmajiem, šī iemesla dēļ tiek fiksēta kolonnu pārveidojumu vēsture,
2. jauniegūtā diagonālā Diofanta sistēma tiek atrisināta attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem,
3. tiek veikta pāreja uz sākotnējiem nezināmajiem.

1.2. Palīgrezultāti

1.1. teorēma. $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

$$\det(\mathbf{U}) = \pm 1 \implies \mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

PIERĀDĪJUMS $\det(\mathbf{U}) \neq 0 \implies \mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ eksistē.

Saskaņā ar inversās matricas atrašanas algoritmu matricas $\mathbf{U}^{-1}$ elementi ir matricas $\mathbf{U}$ elementu polinomiālas funkcijas dalītas ar $\det(\mathbf{U})$, tāpēc tie visi ir veseli skaitļi.■

1.2. teorēma. Ja tiek veikta Diofanta sistēmas

$$D_x \sim \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(ar matricu $\mathbf{A}$) nezināmo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ maiņa ar lineāru pārveidojumu

$\mathbf{U}$, $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$, kura rezultātā tiek iegūta jauna Diofanta sistēma

$$D_y \sim (\mathbf{AU}) \underbrace{\left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}\right)}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

ar matricu $\mathbf{AU}$ un nezināmajiem $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$, tad sistēmu D_x un D_y veselo atrisinājumu kopas ir saistītas ar bijektīviem pārveidojumiem $\mathbf{U}$ un $\mathbf{U}^{-1}$ (*nezināmo substitūcijas ar pārveidojumiem* $\boldsymbol{U}$ *un* $\boldsymbol{U}^{-1}$ *ir korektas*).

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathbf{U} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{Z}) \\ \det(\mathbf{U}) = \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists\ \mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{Z}) \\ \det(\mathbf{U}^{-1}) = \det(\mathbf{U}) = \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

reizināšana ar $\mathbf{U}$ un$\mathbf{U}^{-1}$ ir bijektīvas funkcijas matricu kopās.

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Uy}.$$

$$\begin{cases} \mathbf{U} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{Z}) \\ \mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{Z}) \end{cases} \Longrightarrow$$

1. $\mathbf{x}_0$ ir vesels atrisinājums sistēmai D_x $\Longrightarrow$ $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}_0$ ir vesels atrisinājums sistēmai D_y,
2. $\mathbf{y}_0$ ir vesels atrisinājums sistēmai D_y $\Longrightarrow$ $\mathbf{U}\mathbf{y}_0$ ir vesels atrisinājums sistēmai D_x.

Reizināšana ar $\mathbf{U}$ un $\mathbf{U}^{-1}$ ir bijektīvas funkcijas, tāpēc to šašaurinājumi uz atrisinājumu kopām arī it bijektīvas funkcijas.■

1.3. teorēma. Ja matricai $\mathbf{A}$ tiek pielietota pārveidojumu virkne, kas satur 1. un 3. veida pārveidojumus un 2. veida pārveidojumus ar koeficientiem ± 1, kurai atbilst matrica $\mathbf{U}$, tad $\det(\mathbf{U}) = \pm 1$.

PIERĀDĪJUMS Tiek izmantota determinanta multiplikatīvā īpašība un fakti par elementāro matricu determinantiem.■

1.3. Matricas pārveidošana diagonālajā formā

1.3.1. Algoritms

LDVS sistēmas paplašināto matricu var pārveidot diagonālajā formā saskaņā ar šādu algoritmu:

1. atrodam pēc moduļa mazāko nenulles elementu sistēmas matricā (bez brīvajiem locekļiem), pārvietojam to uz rūtiņu $(1, 1)$ ar 1.veida elementārajiem pārveidojumiem, veicam 3.un 2.veida elementāros pārveidojumus tā, lai pirmajā rindā un pirmajā kolonnā iegūtu pēc iespējas mazākus pēc moduļa elementus, ja kaut kur sistēmas matricā parādās pēc moduļa vēl mazāks nenulles elements nekā elements rūtiņā $(1, 1)$, tad veicam otrā veida elementāros pārveidojumus un pārvietojam to uz rūtiņu $(1, 1)$ un turpinām pārveidot pirmo rindu un pirmo kolonnu ar 1.un 3.veida pārveidojumiem tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā $(1, 1)$ un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes

paplašinātā matrica izskatās šādi:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & 0 & 0...0 & b'_1 \\ \hline 0 & a_{22} & ... & b'_2 \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & a_{m2} & ... & b'_m \end{array}\right],$$

2. atrodam pēc moduļa mazāko elementu apakšmatricā, kuras augšējais kreisais stūris ir rūtiņa $(2,2)$, atkārtojam 1.solī aprakstītās darbības ar šo apakšmatricu, turpinām pārveidot otro rindu un otro kolonnu tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā $(2,2)$ un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes paplašinātā matrica izskatās šādi:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & 0 & 0...0 & b''_1 \\ 0 & a_{22} & 0...0 & b''_2 \\ \hline 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b''_m \end{array}\right],$$

... ...

Algoritms tiek uzskatīts par pabeigtu tad, kad sistēmas matrica (bez brīvajiem locekļiem) ir diagonālajā formā.

Atgādināsim, ka

- ar kolonnām var veikt tikai
  - 1.veida pārveidojumus,
  - 2.veida pārveidojumus ar koeficientiem ± 1,
  - 3.veida pārveidojumus ar veseliem reizinātājiem;
- ar rindām var veikt
  - 1. veida pārveidojumus,
  - 2.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi (reizināt ar veseliem koeficientiem un dalīt ar kopīgiem reizinātājiem),
  - 3.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi.

1.4. teorēma. Katrā algoritma solī rezultāts tiek panākts pēc galīga skaita elementāro pārveidojumu veikšanas (galīgā laikā).

PIERĀDĪJUMS Izmantojam lineārās kombinācijas īpašību. 1.un 3.veida pārveidojumu rezultātā elements, kas atrodas augšējā kreisajā rūtiņā, paliek mazāks pēc katra 1.veida pārveidojumu virknes. ■

1.1. piemērs. Atradīsim diagonālo formu matricai

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Veiksim šādu elementāro pārveidojumu virkni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

1.3.2. Nezināmo substitūciju fiksēšana

Veicot elementāros pārveidojumus ar kolonnām, tiek veiktas nezināmo substitūcijas. Katram kolonnu elementārajam pārveidojumam t ar matricu $\mathbf{T}$ notiek pāreja no sākotnējiem nezināmajiem $\mathbf{x}$ uz jaunajiem nezināmajiem $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$.

Lai fiksētu visas nezināmo substitūcijas, ir ērti veikt elementāros pārveidojumus sākot nevis ar paplašināto matricu

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right],$$

bet ar *bloku matricu*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Tagad kolonnu pārveidojumi tiek automātiski fiksēti apakšmatricā, kas atrodas zem $\mathbf{A}$. Visu pārveidojumu rezultātā iegūsim matricu

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{U} & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

kur $\mathbf{U}$ ir pārejas matrica no sākotnējiem nezināmajiem uz jaunajiem nezināmajiem, attiecībā uz kuriem sistēmas paplašinātā matrica ir

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{b}' \end{array}\right].$$

1.3.3. Jauno nezināmo atrašana

Iepriekšējā soļa rezultātā ir iegūta paplašinātā matrica

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{b}' \end{array}\right], \text{ kur } \begin{cases} \mathbf{D} = diag(d_1, ..., d_r) \\ \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ ... \\ \widetilde{b}_m \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Tai atbilst LDVS

$$\begin{cases} d_1y_1 & & & = \widetilde{b}_1 \\ & d_2y_2 & & = \widetilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & d_ry_r & = \widetilde{b}_r \\ & & 0 & = \widetilde{b}_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & 0 & = \widetilde{b}_m \end{cases}$$

Šādai sistēmai eksistē vesels atrisinājums $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} d_i|\widetilde{b}_i, \forall\ i:\ 1 \leq i \leq r \\ \widetilde{b}_i = 0, \forall\ i : r < i \leq m. \end{cases}$$

Ja $d_i = 0$, tad jābūt arī $\widetilde{b}_i = 0$, lai sistēmai būtu atrisinājums, šādā gadījumā y_i ir patvaļīgs.

Ja šis nosacījums izpildās, tad

$$\begin{cases} y_i = \frac{\widetilde{b}_i}{d_i}, & \text{ja } d_i \neq 0, \\ y_i \text{ patvaļīgs}, & \text{ja } d_i = 0 \text{ vai } i > r. \end{cases}$$

1.2. piemērs. Sistēmas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

atrisinājums ir

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{ kur } y_3 \in \mathbb{Z} \text{ ir patvaļīgs.}$$

1.4. Pāreja atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

Iepriekšējā solī esam atraduši nezināmo vektoru $\mathbf{y}$. Tā kā kolonnu elementāro pārveidojumu matrica ir $\mathbf{U}$ un $\mathbf{y} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$, tad

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \widetilde{b}_1/d_1 \\ \widetilde{b}_2/d_2 \\ \dots \\ \widetilde{b}_r/d_r \\ y_{r+1} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

1.3. piemērs.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ t \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2+2t \\ -2+t \end{bmatrix}.$$

1.4. piemērs. Atrisināsim veselos skaitļos sistēmu

$$\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x-y+4z=14 \end{cases}$$

1.1. piezīme. *Ar lineāro Diofanta vienādojumu sistēmām saistītas neatrisinātas problēmas*: lineāro Diofanta vienādojumu sistēmas ir saistītas ar svarīgām neatrisinātām problēmām ķīmijā. Kompleksu ķīmisku reakciju sadalīšana elementārās reakcijās var tikt noformulēta LDVS terminos. Ir daudz šķietami vienkāršu un sen pētītu reakciju, kurām sadalījums elementārās reakcijās nav zināms. Informāciju var atrast internetā.

2. 14.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

14.1 Pārveidot matricu

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

diagonālajā formā, ar kolonnām veicot tikai 1.un 3.veida pārveidojumus kā arī 2.veida pārveidojumus ar koeficientiem ± 1 (ar rindām var veikt visu veidu elementāros pārveidojumus). Atrast kolonnu pārveidojumu matricu $\mathbf{U}$.

14.2 Atrisināt veselos skaitļos vienādojumus

a)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - t = a \\ 3x + 4y - z + 2t = 5, \text{ kur } a \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_1 = 3. \end{cases}$$

14.3 Kādam cilvēkam ir 2000 lati. Cilvēks vēlas iegādāties tieši 100 grāmatas. Ļoti laba grāmata maksā 50 latus gabalā, vidēji laba grāmata maksā 20 latus gabalā, lēta grāmata maksā 5 latus gabalā. Kādus grāmatu komplektus cilvēks var nopirkt?