DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

13.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāru vienādojumu ar diviem nezināmajiem risināšanu veselos skaitļos,
- atkārtot lineāru vienādojumu sistēmu risināšanu.

Lekcijas kopsavilkums:

- lineārus vienādojumus veselos skaitļos var atrisināt izmantojot dalāmību un Eiklīda algoritma sekas,
- lineāras vienādojumu sistēmas var atrisināt izmantojot rindu elementāros pārveidojumu un matricu formālismu.

Svarīgākie jēdzieni: Diofanta vienādojumi, lineāru vienādojumu sistēmas (LVS), LVS elementārie pārveidojumi, matricu algebra, elementārās matricas, kolonnu elementārie pārveidojumi.

Svarīgākie fakti un metodes: lineāru homogēnu Diofanta vienādojumu ar diviem nezināmajiem risināšana, lineāru nehomogēnu Diofanta vienādojumu ar diviem nezināmajiem risināšana, Gausa metode.

1. Vienādojumu risināšana veselos skaitļos

1.1. Ievads

Algebrisku vienādojumu

$$F(x_1, ..., x_n) = 0$$

sauc par *Diofanta vienādojumu*, ja polinoma F koeficienti ir veseli skaitļi un atrisinājumi tiek meklēti kopā $\mathbb{Z}$.

Diofanta vienādojumu atrisinājumus var interpretēt kā punktus ar veselām Dekarta koordinātēm, kas apmierina doto vienādojumu.

Attiecībā uz Diofanta vienādojumiem var risināt vismaz šādas problēmas:

1. noteikt, vai dotajam vienādojumam eksistē vismaz viens vesels atrisinājums, konstruktīvi vai nekonstruktīvi,

2. atrast visus dotā vienādojuma veselos atrisinājumus, vairāk vai mazāk konstruktīvi un/vai aprakstoši,
3. saskaitīt atrisinājumus ar dotiem ierobežojumiem (kādā apgabalā).

Diofanta vienādojumu ekvivalentie pārveidojumi:

1. pieskaitīt vienādojuma abām pusēm vienu un to pašu $a \in \mathbb{Z}$;
2. reizināt abas puses ar vienu un to pašu $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$;
3. ja katrs polinoma koeficients dalās ar d, tad izdalīt visus koeficientus ar d.

1.2. Lineārs vienādojums ar diviem nezināmajiem

1.2.1. Homogēns vienādojums

1.1. teorēma. Jebkurš Diofanta vienādojuma

$$ax + by = 0$$

atrisinājums $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ir izsakāms formā

$$\begin{cases} x = \frac{b}{d}t \\ y = -\frac{a}{d}t, \end{cases} \quad \text{kur } d = LKD(a, b).$$

PIERĀDĪJUMS

$$\Big(ax = -by\Big) \iff \Big(\frac{a}{d}x = -\frac{b}{d}y\Big).$$

$$\begin{cases} \frac{b}{d} | \frac{a}{d}x \\ LKD(\frac{b}{d}, \frac{a}{d}) = 1 \end{cases} \implies \frac{b}{d}|x \implies x = \frac{b}{d}t, \text{ kur } t \in \mathbb{Z}.$$

$\implies y = -\frac{a}{d}t.$ ■

1.1. piemērs. $4x + 6y = 0$, $d = 2$, $\forall$ skaitļu pāris $(3t, -2t), t \in \mathbb{Z}$ ir atrisinājums.

$12x - 24y = 0$, $d = 12$, $\forall$ skaitļu pāris $(2t, t), t \in \mathbb{Z}$ ir atrisinājums.

1.2.2. Nehomogēns vienādojums

1.2. teorēma. Diofanta vienādojumam

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$$

$\exists$ atrisinājums $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \iff d|c$.

PIERĀDĪJUMS $d|a_i, \forall\ i \implies$

$$d|\underbrace{(a_1x_1 + ... + a_nx_n)}_{=c}, \forall\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Esam pierādījuši, ka ja vienādojumam $a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$ ir vesels atrisinājums, tad $d|c$.

Implikācija otrā virzienā. $d|c \implies \exists\ \{q, x_1', ..., x_n'\} \subseteq \mathbb{Z}$:

$$c = qd = q\underbrace{(a_1x_1' + ... + a_nx_n')}_{=d}$$

(d var izteikt kā kopas $\{a_1, ..., a_n\}$ elementu veselu lineāru kombināciju ar koeficientiem x_i'). $\Longrightarrow$

$$c = q(a_1x_1' + ... + a_nx_n') = a_1(qx_1') + a_2(qx_2') + ... + a_n(qx_n')$$

un par veselu atrisinājumu var izvēlēties virkni

$$x_1 = qx_1', ..., x_n = qx_n'.\blacksquare$$

1.2. piemērs. Vienādojumam $4x + 6y = 5$ nav veselu atrisinājumu, jo $2 \nmid 5$.

1.3. teorēma. Jebkurš Diofanta vienādojuma $ax+by = c, d|c$ atrisinājums ir izsakāms formā

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} \text{ kur } (x_0, y_0) \text{ ir fiksēts atrisinājums un } t \in \mathbb{Z}.$$

PIERĀDĪJUMS Jebkurš veselu skaitļu pāris

$$(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t)$$

ir nehomogēnā vienādojuma atrisinājums, jo

$$a(x_0 + \tfrac{b}{d}t) + b(y_0 - \tfrac{a}{d}t) = (ax_0 + by_0) + (a\tfrac{b}{d}t + b(-\tfrac{a}{d}t)) = c + 0 = c$$

No otras puses, ja skaitļu pāris (x, y) ir nehomogēnā vienādojuma atrisinājums, tad

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = (ax + by) - (ax_0 + by_0) = c - c = 0,$$

tāpēc $(x - x_0, y - y_0)$ ir homogēnā vienādojuma atrisinājums un ir izsakāms formā $(\frac{b}{d}t, -\frac{a}{d}t)$. ■

1.1. piezīme. Nehomogēnā vienādojuma atrisinājumu (x_0, y_0) var atrast izmantojot LKD lineārās kombinācijas īpašību šādā veidā.

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ d|c \implies c = td \\ d = x'a + y'b \end{cases} \implies c = td = t\underbrace{(x'a + y'b)}_{=d} = a(tx') + b(ty'),$$

tāpēc varam ņemt $x_0 = tx'$ un $y_0 = ty'$.

1.3. piemērs. $4x + 6y = 8$. $d = 2 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 6 \implies (x_0, y_0) = (-4, 4)$ ir vienādojuma atrisinājums $\implies$ vienādojuma atrisinājumu kopa ir

$$\{(-4 + 3t, 4 - 2t) | t \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Lineāru Diofanta vienādojumu sistēmas

2.1. Gausa metodes un matricu formālisma atkārtojums

Atkārtosim un iespēju robežās pārnesīsim uz Diofanta lineārajām sistēmām zināmos lineāro vienādojumu sistēmu jēdzienus.

2.1.1. Lineāru vienādojumu sistēmas (LVS)

- Lineāra vienādojumu sistēma (LVS):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  kur x_j - *nezināmie*, a_{ij} - *koeficienti*, b_i - *brīvie locekļi;*

- LVS var uzdot matricas pierakstā $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kur $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ - *sistēmas matrica*, $\mathbf{x}$ - nezināmo kolonnas matrica, $\mathbf{b}$ - brīvo locekļu kolonnas matrica;

- LVS var uzdot ar paplašināto matricu $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

2.1.2. LVS (rindu) elementārie pārveidojumi

1. 1.veida pārveidojumi - vienādojumu (matricas rindu) mainīšana vietām - paliek spēkā arī Diofanta sistēmām,

2. 2.veida pārveidojumi - vienādojuma (matricas rindas) reizināšana ar nenulles elementu - Diofanta sistēmām var reizināt vai dalīt visus viena vienādojuma locekļus ar veseliem skaitļiem tā, lai rezultāti visi koeficienti ir veseli skaitļi,
3. 3.veida pārveidojumi - viena vienādojuma daudzkārtņa pieskaitīšana otram vienādojumam - Diofanta sistēmām var reizināt vienādojumus/rindas tā, lai rezultātā rodas tikai veseli koeficienti.

Var definēt arī analoģiskus pārveidojumu ar kolonnām - kolonnu elementāros pārveidojumus.

2.1.3. LVS ekvivalence un tās saistība ar elementārajiem pārveidojumiem

Divas LVS sauc par *ekvivalentām*, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas. Pamatidejas LVS risināšanā:

- pārveidot vienādojumus tā, lai jaunie vienādojumu būtu ērtāk risināmi - klasiskā Gausa metode,

- veikt nezināmo maiņas (substitūcijas) tā, lai attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem sistēma būtu ērtāk risināma, pēc tam pāriet atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

Ja LVS L_2 var tikt iegūta no L_1 veicot galīgu skaitu rindu elementāru pārveidojumu, tad L_1 un L_2 ir ekvivalentas.

2.1.4. Matricas, matricas pakāpienveida forma

Būtu jāzina:

1. matricu saskaitīšanas un reizināšana ar skaitli (gredzena elementu), šo operāciju īpašības,
2. matricu reizināšana, tās īpašības (asociativitāte, reizināšana ar vienības matricu, u.c.)
3. inversās matricas jēdziens.

Par matricas rindas *nuļļu indeksu* sauc nepārtrauktas nuļļu virknes garumu, kas sākas no rindas kreisās malas.

Matrica ir *pakāpienveida formā*, ja tās rindu nuļļu indeksu virkne ir augoša. Citiem vārdiem sakot, šādai matricai nuļļu virknes, kas sākas rindas kreisajā malā, kļūst arvien garākas.

Pakāpienveida matrica ir *reducētā pakāpienveida formā*, ja katrā rindā pirmais nenulles elements no kreisās malas ir vienāds ar 1. Šādas rūtiņas sauc par rindu *galvenajām rūtiņām*.

Matrica ir *diagonālajā formā* $diag(d_1, ..., d_m)$, ja uz tās galvenās diagonāles ir elementi $d_1, ..., d_m$.

2.1.5. Kvadrātveida matricas determinants un tā pielietojumi

Būtu jāzina:

1. determinanta definīcija,
2. determinanta īpašības (rindu un kolonnu linearitāte, antisimetrija, multiplikativitāte, vienības matricas determinants),

3. determinanta aprēķināšanas metodes,
4. inversās matricas atrašana.

2.1.6. Matricas rindu un kolonnu elementāro pārveidojumu interpretācija ar matricu reizināšanas formālismu

Par *elementāro pārveidojumu matricām* sauksim matricas, kuras iegūst, pielietojot rindu vai kolonnu elementāros pārveidojumu vienības matricai $\mathbf{E}_n$.

Definēsim šādas elementāro pārveidojumu matricas:

1. 1.veida elementārā pārveidojuma matrica $\mathbf{S}_{ij}$,
2. 2.veida elementārā pārveidojuma matrica $\mathbf{D}_i(\lambda)$,
3. 3.veida elementārā pārveidojuma matrica $\mathbf{R}_{ij}(\lambda)$ un kolonnu elementārā pārveidojuma matrica $\mathbf{C}_{ij}(\lambda)$ ($\mathbf{R}_{ij}(\lambda) = \mathbf{C}_{ij}^T(\lambda)$).

2.1. piemērs.

$$\mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. teorēma. Matricas **A** rindu (kolonnu) elementārā pārveidojuma rezultāts ir vienāds ar **TA** (**AT**), kur **T** ir atbilstošā elementārā pārveidojuma matrica.

PIERĀDĪJUMS Katram pārveidojumam tiek veikta pārbaude.■

Ja ar matricu A tiek veikti vairāki pārveidojumi, tad to rezultāts ir vienāds ar A reizināšanu ar attiecīgajām elementāro pārveidojumu matricām no attiecīgās puses.

2.2. piemērs. Ja ar matricu **A** tiek veikta pārveidojumu virkne

$$(r_1, c_1, r_2, r_3, c_2)$$

ar matricām $\mathbf{R}_i$ un $\mathbf{C}_i$, tad šīs pārveidojumu virknes rezultāts ir matrica

$$(\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)\mathbf{A}(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2).$$

2.2. teorēma. Matricas rindu vai kolonnu elementāro pārveidojumu virknei $(t_1, ..., t_k)$ atbilstošā matrica $\mathbf{T}$ ir vienāda ar pārveidojumu virknes $(t_1, ..., t_k)$ pielietošanu vienības matricai.

2.1.7. Lineāru vienādojumu sistēmu nezināmo maiņas un to saistība ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem

Kolonnu elementāros pārveidojumus var interpretēt kā pārejas uz jauniem nezināmajiem: ja sākotnēji ir dota LVS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

un $\mathbf{V}$ ir invertējama $n \times n$-matrica, kur n ir nezināmo skaits ($\mathbf{x}$ vektora garums), tad

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{AE}_n\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{VV}^{-1})\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{AV})}_{=\mathbf{A}'}\underbrace{(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x})}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Esam ieguvuši jaunu sistēmu ar

- jaunu matricu $\mathbf{A}' = \mathbf{AV}$ (ko var interpretēt kā matricas $\mathbf{A}$ pārveidojumu ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem) un
- jauniem nezināmajiem $\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$, to skaits ir vienāds ar $\mathbf{x}$-nezināmo skaitu, un tie izsakās kā lineāras funkcijas no $\mathbf{x}$-nezināmajiem.

2.1. piezīme. $\mathbf{x} = \mathbf{Ex} = \mathbf{VV}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{Vy}$.

2.2. piezīme. Kolonnu pārveidojumi nemaina brīvo locekļu vektoru.

2.1.8. Gausa metode

Klasiskā Gausa metode LVS risināšanai sastāv no diviem soļiem:

1. LVS paplašinātās matricas pārveidošana pakāpienveida formā vai reducētā pakāpienveida formā,
2. nezināmo atrašana sākot no vienādojumiem ar mazāko nenulles koeficientu (sākot no beigām un ejot uz augšu).

Parasti Gausa metodē neizmanto kolonnu elementāros pārveidojumus (nezināmo maiņas).

Matricu formālisma terminos Gausa metodi var interpretēt šādi:

1. sākotnējā sistēma
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
ar rindu pārveidojumiem (matricu reizināšanu no kreisās puses) tiek pārveidota par sistēmu
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}', \text{ kur } \mathbf{A}' \text{ ir matrica pakāpienveida formā,}$$
2. sistēma $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiek atrisināta attiecībā uz nezināmajiem $\mathbf{x}$,

3. 13.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

13.1 Atrast visus veselos atrisinājumus šādiem vienādojumiem:

a) $5x + 3y = 15$,
b) $8x - 6y = 10$,
c) $nx + (2n+1)y = 2, n \in \mathbb{N}$.

13.2 Atrast elementāro matricu pārveidojumu determinantus 3×3 matricu gadījumā un parādiet, ka 1. un 3. veida pārveidojumu matricu determinanti pēc moduļa ir vienādi ar 1.

13.3 Atrisināt lineāru vienādojumu sistēmas ar Gausa metodi. Atrast atbilstošās rindu elementāro pārveidojumu matricas.

$$\text{(a)} \begin{cases} X_1 & +3X_2 & +X_3 & = 2 \\ X_1 & +6X_2 & +X_3 & = -1 \\ 4X_1 & +7X_2 & +2X_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 3X_1 & +6X_2 & -3X_3 & = 12 \\ 2X_1 & +4X_2 & -4X_3 & = 0 \\ X_1 & +2X_2 & +X_3 & = 12 \end{cases}$$

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

13.4 *Neatrisināta problēma (Frobēniusa lineāro Diofanta vienādojumu problēma)*: dota $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{N}$, kur $d = 1$, atrast mazāko naturālo skaitli $G(a_1, ..., a_n) : \forall\, c \geq G(a_1, ..., a_n)$ vienādojumam $a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$ ir nenegatīvi atrisinājumi. Pašlaik atrisināta tikai gadījumā, kad $n = 2$.