

*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*  
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*  
*Matemātikas katedra*  
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

## Veselo skaitļu teorija

### 4.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2008./2009.studiju gads*

# Saturs

<b>1. Gausa metodes un matricu formālisma atkārtojums</b>	<b>4</b>
1.1. Svarīgākie palīgjēdzieni . . . . .	4
1.1.1. Lineāru vienādojumu sistēmas (LVS) . . . . .	4
1.1.2. LVS paplašinātās matricas pieraksts . . . . .	6
1.1.3. LVS (rindu) elementārie pārveidojumi . . . . .	7
1.1.4. LVS ekvivalence un tās saistība ar elementārajiem pārveidojumiem . . . . .	8
1.1.5. Matricas, matricas pakāpienveida forma . . . . .	9
1.1.6. Kvadrātveida matricas determinants un tā pielietojumi . . . . .	11
1.1.7. Matricas rindu un kolonnu elementāro pārveidojumu interpretācija ar matricu reizināšanas formālismu . . . . .	12
1.1.8. Lineāru vienādojumu sistēmu nezināmo maiņas un to saistība ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem . . . . .	16
1.2. Gausa metode . . . . .	18

<b>2. Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode</b>	<b>20</b>
2.1. Metodes galvenie soļi . . . . .	20
2.2. Palīgrezultāti . . . . .	21
2.3. Matricas pārveidošana diagonālajā formā . . . . .	25
2.3.1. Algoritms . . . . .	25
2.3.2. Nezināmo maiņas fiksēšana . . . . .	29
2.4. Jauno nezināmo atrašana . . . . .	31
2.5. Pāreja atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem. . . . .	34
<b>3. 4.mājasdarbs</b>	<b>38</b>

# 1. Gausa metodes un matricu formālisma atkārtojums

## 1.1. Svarīgākie palīgžēdzieni

Atkārtosim un iespēju robežās pārnesīsim uz Diofanta lineārajām sistēmām zināmos lineāro vienādojumu sistēmu jēdzienus.

### 1.1.1. Lineāru vienādojumu sistēmas (LVS)

Par *gredzenu* sauc kopu ar divām binārām operācijām, kuras parasti apzīmē ar  $+$  un  $\cdot$ , un kuras apmierina komutativitātes, asociativitātes un distributivitātes īpašības (piemēri -  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ).

## Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

sauksim par *lineāru vienādojumu sistēmu (LVS)* virs gredzena  $R$ , ja visas funkcijas  $f_i$  ir pirmās pakāpes polinomi ar koeficientiem no gredzena  $R$ .

Par LVS vispārīgo pierakstu sauksim sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kur  $x_j$  - nezināmie,  $a_{ij}$  - koeficienti,  $b_i$  - brīvie locekļi.

Ja visi brīvie locekļi ir vienādi ar nulli, tad LVS saucim par homogēnu.

Ja nezināmo skaits ir neliels (ne vairāk kā 5), tad mēs apzīmēsim tos ar burtiem bez indeksiem -  $x, y, z$  u.c., kurus matemātikā tradicionāli izmanto nezināmo lielumu apzīmēšanai.

### 1.1.2. LVS paplašinātās matricas pieraksts

LVS ar  $n$  nezināmajiem un  $m$  vienādojumiem *paplašinātā matrica* ir tabula ar  $n + 1$  kolonnu un  $m$  rindām, kurā pēdējās kolonnas  $i$ -tajā rindā tiek rakstīts brīvais loceklis  $b_i$ , bet pirmajās  $n$  kolonnās tiek ierakstīti koeficienti pie nezināmajiem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

LVS sistēmas matrica ir tabula ar  $n$  kolonnām un  $m$  rindām, kurā tiek ierakstīti tikai koeficienti pie nezināmajiem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 1.1.3. LVS (rindu) elementārie pārveidojumi

- 1.veida pārveidojumi - vienādojumu (matricas rindu) mainīšana vietām - paliek spēkā arī Diofanta sistēmām,
- 2.veida pārveidojumi - vienādojuma (matricas rindas) reizināšana ar nenulles elementu - Diofanta sistēmām var reizināt vai dalīt visus viena vienādojuma locekļus ar veseliem skaitļiem tā, lai rezultāti visi koeficienti ir veseli skaitļi,

3. 3.veida pārveidojumi - viena vienādojuma daudzkārtņa pieskaitīšana otram vienādojumam - Diofanta sistēmām var reizināt vienādojumus/rindas ar veseliem koeficientiem.

Var definēt arī analogiskus pārveidojumu ar kolonnām - kolonnu elementāros pārveidojumus.

#### 1.1.4. LVS ekvivalence un tās saistība ar elementārajiem pārveidojumiem

Divas LVS sauc par *ekvivalentām*, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas. Pamatidejas LVS risināšanā:

- pārveidot vienādojumus tā, lai jaunie vienādojumu būtu ērtāk risināmi - klasiskā Gausa metode,
- veikt nezināmo maiņas (substitūcijas) tā, lai attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem sistēma būtu ērtāk risināma, pēc tam pāriet atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

**1.1. teorēma.** Ja LVS  $L_2$  var tikt iegūta no  $L_1$  veicot galīgu skaitu rindu elementāru pārveidojumu, tad  $L_1$  un  $L_2$  ir ekvivalentas.

### 1.1.5. Matricas, matricas pakāpienveida forma

Par *matricu* sauc galīgu taisnstūrveida tabulu, kuras rūtiņās ir ierakstīti skaitļi vai citi objekti (kāda gredzena elementi), kurus var saskaitīt un reizināt savā starpā.

Būtu jāzina:

1. matricu saskaitīšanas un reizināšana ar skaitli (gredzena elementu), šo operāciju īpašības,
2. matricu reizināšana, tās īpašības (asociativitāte, reizināšana ar vienības matricu, u.c.)
3. inversās matricas jēdziens,
4. LVS matricas pieraksts ( $L \sim AX = B$ ).

Par matricas rindas *nullu indeksu* sauc nepārtrauktas nullu virknes garumu, kas sākas no rindas kreisās malas.

Matrica ir *pakāpienveida formā* (*row echelon form*), ja tās rindu nullu indeksu virkne ir augoša. Citiem vārdiem sakot, šādai matricai nullu virknes, kas sākas rindas kreisajā malā, kļūst arvien garākas.

Pakāpienveida matrica ir *reducētā pakāpienveida formā*, ja katrā rindā pirmais nenulles elements no kreisās malas ir vienāds ar 1. Šādas rūtiņas sauc par rindu *galvenajām rūtiņām*.

Matrica ir *diagonālajā formā*  $diag(d_1, \dots, d_m)$ , ja uz tās galvenās diagonāles ir elementi  $d_1, \dots, d_m$ .

### 1.1.6. Kvadrātveida matricas determinants un tā pielietojumi

Būtu jāzina:

1. determinanta definīcija,
2. determinanta īpašības (rindu un kolonnu linearitāte, antisimetrija, multiplikatīvitate, vienības matricas determinants, minors, algebriskais papildinājums),
3. determinanta aprēķināšanas metodes,
4. inversās matricas atrašana.

### 1.1.7. Matricas rindu un kolonnu elementāro pārveidojumu interpretācija ar matricu reizināšanas formālismu

Par *elementāro pārveidojumu matricām* sauksim matricas, kuras iegūst, pielietojot rindu vai kolonnu elementāros pārveidojumu vienības matricai  $E_n$ .

Definēsim šādas elementāro pārveidojumu matricas:

1. pirmā veida elementārā pārveidojuma matrica  $S_{ij}$ ,
2. otrā veida elementārā pārveidojuma matrica  $D_i(\lambda)$ ,
3. trešā veida rindu elementārā pārveidojuma matrica  $R_{ij}(\lambda)$  un kolonnu elementārā pārveidojuma matrica  $C_{ij}(\lambda)$  (var pierādīt, ka  $R_{ij}(\lambda) = C_{ij}^T(\lambda)$ ).

## 1.1. piemērs.

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$R_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**1.2. teorēma.** Matricas  $A$  rindu (kolonnu) elementārā pārveidojuma rezultāts ir vienāds ar  $TA$  ( $AT$ ), kur  $T$  ir atbilstošā elementārā pārveidojuma matrica.

**PIERĀDĪJUMS** Katram pārveidojuma tipam tiek veikta tieša pārbaude. ■

Ja ar matricu  $A$  tiek veikti vairāki pārveidojumi, tad to rezultāts ir vienāds ar  $A$  reizināšanu ar attiecīgajām elementāro pārveidojumu matricām no attiecīgās puses.

**1.2. piemērs.** Ja ar matricu  $A$  tiek veikta pārveidojumu virkne

$$(r_1, c_1, r_2, r_3, c_2)$$

ar matricām  $R_i$  un  $C_i$ , tad šīs pārveidojumu virknes rezultāts ir matrica

$$(R_3 R_2 R_1) A (C_1 C_2).$$

**1.3. teorēma.** Matricas rindu vai kolonnu elementāro pārveidojumu virknei  $(t_1, \dots, t_k)$  atbilstošā matrica  $T$  ir vienāda ar pārveidojumu virknes  $(t_1, \dots, t_k)$  pielietošanu vienības matricai.

**PIERĀDĪJUMS** Apskatīsim kolonnu elementāros pārveidojumus. Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru  $k$  - elementāro pārveidojumu skaitu.

Indukcijas bāze Apgalvojums ir patiess, ja  $k = 1$  - vienam elementāram pārveidojumam  $t$  atbilstošā elementārā matrica ir  $t$  pielietošana vienības matricai.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka pēc  $i$  pārveidojumiem no pāra  $(A, E)$  ir iegūts pāris  $(A', U')$ , kur  $A' = AU'$  un  $U'$  ir iegūta no vienības matricas ar visu  $i$  pārveidojumu pielietošanu. Pielietosim vēl vienu elementāro pārveidojumu  $t$  ar matricu  $T$ :

1. no  $A'$  iegūsim  $A'' = A'T = AU'T$ ,
2. no  $U'$  iegūsim  $U'' = U'T$ .

Redzam, ka  $A'' = AU''$  un indukcijas solis ir pierādīts. ■

### 1.1.8. Lineāru vienādojumu sistēmu nezināmo maiņas un to saistība ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem

*Kolonnu elementāros pārveidojumus* var interpretēt kā pārejas uz jauniem nezināmajiem: ja sākotnēji ir dota LVS

$$AX = B$$

un  $V$  ir invertējama  $n \times n$ -matrica, kur  $n$  ir nezināmo skaits ( $X$  vektora garums), tad

$$AX = AE_n X = A(VV^{-1})X = \underbrace{(AV)}_{=A'} \underbrace{(V^{-1}X)}_{=Y} = A'Y = B.$$

Esam ieguvuši jaunu sistēmu ar

- jaunu matricu  $A' = AV$  (ko var interpretēt kā matricas  $A$  pārveidojumu ar kolonnu elementārajiem pārveidojumiem) un
- jauniem nezināmajiem  $Y = V^{-1}X$ , to skaits ir vienāds ar  $X$ -nezināmo skaitu, un tie izsakās kā lineāras funkcijas no  $X$ -nezināmajiem.

**1.1. piezīme.** Ievērosim, ka  $X = EX = VV^{-1}X = V(V^{-1}Y) = VY$ .

**1.2. piezīme.** Ievērosim, ka kolonnu pārveidojumi nemaina brīvo locekļu vektoru.

## 1.2. Gausa metode

Klasiskā Gausa metode LVS risināšanai sastāv no diviem soļiem:

1. LVS paplašinātās matricas pārveidošana pakāpienveida formā vai reducētā pakāpienveida formā,
2. nezināmo atrašana sākot no vienādojumiem ar mazāko nenulles koeficientu (sākot no beigām un ejot uz augšu).

Parasti Gausa metodē neizmanto kolonnu elementāros pārveidojumus (nezināmo maiņas).

Matricu formālisma terminos Gausa metodi var interpretēt šādi:

1. sākotnējā sistēma

$$AX = B$$

ar rindu pārveidojumiem (matricu reizināšanu no kreisās puses) tiek pārveidota par sistēmu

$$A'X = B',$$

kur  $A'$  ir matrica pakāpienveida formā,

2. sistēma  $A'X = B$  tiek atrisināta attiecībā uz nezināmajiem  $X$ ,

## 2. Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode

### 2.1. Metodes galvenie soļi

Lineāro Diofanta sistēmu risināšanas metode sastāv no šādiem soļiem:

1. sistēmas paplašinātā matrica ar rindu un kolonnu elementārajām pārveidojumiem tiek pārveidota noteiktā kanoniskā formā - *diagonālajā formā* atšķirībā no Gausa metodes tiek izmantoti arī kolonnu (nezināmo) pārveidojumi, citiem vārdiem sakot, notiek pāreja uz jauniem nezināmajiem, šī iemesla dēļ tiek fiksēta kolonnu pārveidojumu vēsture,
2. jauniegūtā Diofanta sistēma tiek atrisināta attiecībā uz jauniem nezināmajiem,
3. tiek veikta pāreja uz sākotnējiem nezināmajiem.

## 2.2. Palīgrezultāti

**2.1. teorēma.** Ja  $n \times n$  matricai  $U$  ar veseliem elementiem

$$\det(U) = \pm 1,$$

tad  $U^{-1}$  arī ir matrica ar veseliem elementiem.

PIERĀDĪJUMS  $\det(U) \neq 0$ , tāpēc  $U^{-1}$  eksistē. Saskaņā ar inversās matricas atrašanas algoritmu matricas  $U^{-1}$  elementi ir matricas  $U$  elementu polinomiālas funkcijas dalītas ar  $\det(U)$ , tāpēc tie visi ir veseli skaitļi. ■

**2.2. teorēma.** Ja tiek veikta Diofanta sistēmas

$$D_x \sim AX = B$$

(ar matricu  $A$ ) nezināmo  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  maiņa ar lineāru pārveidojumu  $U$ ,  $\det(U) = \pm 1$ , kura rezultātā tiek iegūta jauna Diofanta sistēma

$$D_y \sim (AU) \underbrace{(U^{-1}X)}_{=Y} = B$$

(ar matricu  $AU$ ) ar nezināmajiem  $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$ , tad sistēmu  $D_x$  un  $D_y$  veselo atrisinājumu kopas ir saistītas ar bijektīviem pārveidojumiem  $U$  un  $U^{-1}$  (*nezināmo maiņa ar pārveidojumiem  $U$  un  $U^{-1}$  ir korekta*).

**PIERĀDĪJUMS** Ja matricai ar veseliem elementiem  $U$  izpildās  $\det(U) = \pm 1$ , tad  $U^{-1}$  eksistē, tai ir veseli elementi un

$$\det(U^{-1}) = \det(U) = \pm 1.$$

Redzam, ka gan  $U$ , gan  $U^{-1}$  ir bijektīvas funkcijas.

Ja  $Y = U^{-1}X$ , tad  $X = UY$ .

Tā kā  $U$  un  $U^{-1}$  ir matricas ar veseliem elementiem, tad

1. ja  $X_0$  ir vesels atrisinājums sistēmai  $D_x$ , tad  $U^{-1}X_0$  ir vesels atrisinājums sistēmai  $D_y$ ,
2. ja  $Y_0$  ir vesels atrisinājums sistēmai  $D_y$ , tad  $UX$  ir vesels atrisinājums sistēmai  $D_x$ .

Funkcijas  $U$  un  $U^{-1}$  ir bijektīvas, tāpēc tās ir veselo atrisinājumu kopu bijekcijas. ■

**2.3. teorēma.** 1. un 3.veida elementāro pārveidojumu matricām determinanti pēc moduļa ir vienādi ar 1.

PIERĀDĪJUMS Tiek tieši atrasti matricu determinanti. ■

**2.4. teorēma.** Ja matricai  $A$  tiek pielietota pārveidojumu virkne, kas satur 1. un 3. veida pārveidojumus un 2. veida pārveidojumus ar koeficientiem  $\pm 1$ , kurai atbilst matrica  $U$ , tad  $\det(U) = \pm 1$ .

PIERĀDĪJUMS Tiek izmantota determinanta multiplikatīvā īpašība. ■

## 2.3. Matricas pārveidošana diagonālajā formā

### 2.3.1. Algoritms

LDVS sistēmas paplašināto matricu var pārveidot diagonālajā formā saskaņā ar šādu algoritmu:

1. atrodam pēc moduļa mazāko nenulles elementu sistēmas matricā (bez brīvajiem locekļiem), pārvietojam to uz rūtiņu  $(1, 1)$  ar pirmā veida elementārajiem pārveidojumiem, pieskaitām tā daudzkārtņus pirmajai rindai un pirmajai kolonnai tā, lai visur iegūtu pēc iespējas mazākus pēc moduļa elementus, ja nepieciešams, veicam otrā veida elementāros pārveidojumus, turpinām pārveidot pirmo rindu un pirmo kolonnu ar 1. un 3. veida pārveidojumiem tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā  $(1, 1)$  un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes paplaši-

nātā matrica izskatās šādi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\dots 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & b_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2} & \dots & b_m \end{bmatrix},$$

2. atrodam pēc moduļa mazāko elementu apakšmatricā, kuras augšējais kreisais stūris ir rūtiņa (2, 2), atkārtojam 1.solī aprakstītās darbības ar šo apakšmatricu, turpinām pārveidot otro rindu un otro kolonnu tik ilgi, kamēr tikai elements rūtiņā (2, 2) un brīvais loceklis ir atšķirīgs no nulles, pēc šī soļa izpildes paplašinātā matrica izskatās šādi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\dots 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0\dots 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{bmatrix},$$

... ..

Algoritms tiek uzskatīts par pabeigtu tad, kad sistēmas matrica (bez brīvajiem locekļiem) ir diagonālajā formā.

Atgādināsim, ka

- ar kolonnām var veikt tikai 1. veida pārveidojumus, 2.veida pārveidojumus ar koeficientiem  $\pm 1$  un 3.veida pārveidojumus ar veseliem reizinātājiem,
- ar rindām var veikt 1. veida pārveidojumus, 2.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi (reizināt ar veseliem koeficientiem un dalīt ar kopīgiem reizinātājiem) un 3.veida pārveidojumus ar tādiem koeficientiem, kuru rezultātā neparādās daļskaitļi.

**2.5. teorēma.** Katrā algoritma solī rezultāts tiek panākts pēc galīga skaita elementāro pārveidojumu veikšanas (galīgā laikā).

**PIERĀDĪJUMS** 1. un 3. veida pārveidojumu rezultātā elements, kas atrodas augšējā kreisajā rūtiņā, paliek mazāks pēc katra 1. veida pārveidojuma.

**2.1. piemērs.** Atradīsim diagonālo formu matricai

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Veiksim šādu elementāro pārveidojumu virkni:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.3.2. Nezināmo maiņas fiksēšana

Veicot elementāros pārveidojumus ar kolonnām, tiek veiktas nezināmo maiņas. Katram kolonnu elementārajam pārveidojumam  $t$  ar matricu  $T$  notiek pāreja no sākotnējiem nezināmajiem  $X$  uz jauniem nezināmajiem  $T^{-1}X$ .

Lai fiksētu visas nezināmo maiņas, ir ērti veikt elementāros pārveidojumus sākot nevis ar paplašināto matricu

$$\left[ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \right],$$

bet ar matricu

$$\left[ \begin{array}{cc} A & B \\ E & 0 \end{array} \right].$$

Ievērosim, ka tagad kolonnu pārveidojumi tiek automātiski fiksēti apakšmatricā, kas atrodas zem  $A$ . Visu pārveidojumu rezultātā iegūsim matricu

$$\left[ \begin{array}{cc} D & B' \\ U & 0 \end{array} \right],$$

kur  $U$  ir pārejas matrica no sākotnējiem nezināmajiem uz jaunajiem nezināmajiem, attiecībā uz kuriem sistēmas paplašinātā matrica ir

$$\left[ \begin{array}{cc} D & B' \end{array} \right].$$

## 2.4. Jauno nezināmo atrašana

Iepriekšējā soļa rezultātā ir iegūta paplašinātā matrica

$$\begin{bmatrix} D & B' \end{bmatrix},$$

kur

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$$

un

$$B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

Tai atbilst LDVS

$$\begin{cases} d_1 y_1 = b'_1 \\ d_2 y_2 = b'_2 \\ \dots \\ d_m y_m = b'_m \end{cases}.$$

Šādai sistēmai eksistē vesels atrisinājums tad un tikai tad, ja visiem  $i, 1 \leq i \leq m$ , izpildās nosacījums

$$d_i | b'_i.$$

Tādējādi, ja  $d_i = 0$ , tad jābūt arī  $b'_i = 0$ , lai sistēmai būtu atrisinājums, šādā gadījumā  $y_i$  ir patvaļīgs.

Ja  $m < n$ , tad visiem  $i, m + 1 \leq i \leq n$  nezināmais  $y_i$  ir patvaļīgs.

Ja šis nosacījums izpildās, tad visiem  $i, 1 \leq i \leq n$ :

$$\begin{cases} y_i = \frac{b'_i}{d_i}, & \text{ja } d_i \neq 0, \\ y_i \text{ patvaļīgs,} & \text{ja } d_i = 0 \text{ vai } i > m. \end{cases}$$

**2.2. piemērs.** Sistēmas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

atrisinājums ir

$$(2, -2, y_3),$$

kur  $y_3$  ir patvaļīgs vesels skaitlis.

## 2.5. Pāreja atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem.

Iepriekšējā solī esam atraduši nezināmo vektoru  $Y$ . Tā kā kolonnu elementāro pārveidojumu matrica ir  $U$  un  $Y = U^{-1}X$ , tad

$$X = UY = U \begin{bmatrix} b'_1/d_1 \\ b'_2/d_2 \\ \dots \\ b'_r/d_r \\ y_{r+1} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

2.3. piemērs. Ja

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ t \end{bmatrix}$$

un

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tad

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 + 2t \\ -2 + t \end{bmatrix}.$$

**2.4. piemērs.** Atrisināsim veselos skaitļos sistēmu

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 4z = 14 \end{cases}$$

*Ar lineāro Diofanta vienādojumu sistēmām saistītas neatrisinātas problēmas:* lineāro Diofanta vienādojumu sistēmas ir saistītas ar svarīgām neatrisinātām problēmām ķīmijā. Kompleksu ķīmisku reakciju sadalīšana elementārās reakcijās var tikt noformulēta LDVS terminos. Ir daudz šķietami vienkāršu un sen pētītu reakciju, kurām sadalījums elementārās reakcijās nav zināms. Interesenti var atrast informāciju internetā.

### 3. 4.mājasdarbs

1. Atrodiet elementāro matricu pārveidojumu determinantus  $3 \times 3$  matricu gadījumā un parādiet, ka 1. un 3. veida pārveidojumu matricu determinanti pēc moduļa ir vienādi ar 1.
2. Pārveidojiet matricu

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

diagonālajā formā, ar kolonnām veicot tikai pirmā un trešā veida pārveidojumus kā arī otrā veida pārveidojumus ar koeficientiem  $\pm 1$  (ar rindām var veikt visu veidu elementāros pārveidojumus). Atrodiet kolonnu pārveidojumu matricu  $U$ .

3. Atrisīniet veselos skaitļos vienādojumus
  - a)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - t = a \\ 3x + 4y - z + 2t = 5 \end{cases},$$

kur  $a \in \mathbb{Z}$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_1 = 3 \end{cases} .$$

4. Kādam cilvēkam ir 2000 lati. Viņš vai viņa vēlas iegādāties tieši 100 grāmatas. Ļoti laba grāmata maksā 50 latus gabalā, vidēji laba grāmata maksā 20 latus gabalā, lēta grāmata maksā 5 latus gabalā. Kādus grāmatu komplektus cilvēks var nopirkt?