DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

15.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Aritmētiskās funkcijas **3**

1.1. Pamatdefinīcijas . . . 3

1.2. Multiplikatīvās funkcijas . . . 4

1.2.1. Definīcijas un piemēri . . . 4

1.2.2. Vienkāršākās īpašības . . . 7

1.2.3. Mēbiusa funkcija un inversijas formula . . . 12

1.2.4. Dirihlē reizinājums un tā pielietojumi . . . 16

1.3. Rīmana ζ-funkcija . . . 21

1.3.1. Definīcija . . . 21

1.3.2. Vienkāršākās īpašības . . . 21

2. 15.mājasdarbs **24**

1. Aritmētiskās funkcijas

1.1. Pamatdefinīcijas

Par *aritmētisku funkciju* sauksim jebkuru funkciju

$$f : \mathbb{N} \to k,$$

kur k ir kāda no skaitļu kopām ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

1.1. piemērs. $\varphi(n)$, $|Q_m|$,
$\tau(x) = \sum_{y|x} 1$ - n pozitīvo dalītāju skaits.
$\sigma(x) = \sum_{y|x} y$ - n pozitīvo dalītāju summa.
$\sigma_l(x) = \sum_{y|x} y^l$ - n pozitīvo dalītāju l-to pakāpju summa.

Aritmētisku funkciju sauc par

- *multiplikatīvu*, ja

$$LKD(n, m) = 1 \implies f(nm) = f(n)f(m);$$

- *pilnīgi multiplikatīvu*, ja

$$\forall n, m : f(nm) = f(n)f(m);$$

- *aditīvu*, ja

$$LKD(n, m) = 1 \implies f(nm) = f(n) + f(m);$$

- *pilnīgi aditīvu*, ja

$$\forall n, m : f(nm) = f(n) + f(m);$$

- *f-summējošo funkciju*, ja tā ir vienāda ar

$$\sum_{m|n} f(m).$$

1.2. Multiplikatīvās funkcijas

1.2.1. Definīcijas un piemēri

Aritmētisku funkciju f sauksim par *multiplikatīvu funkciju*, ja

$$LKD(n, m) = 1 \implies f(nm) = f(n)f(m).$$

1.1. piezīme. Ja f ir multiplikatīva funkcija, tad $f(1) \in \{0, 1\}$.

1.2. piemērs. $1 = u(n)$, $id(n) = N(n) = n$, $\varphi(n)$.
$LKD(n, k)$, ja k ir fiksēts.
$\left(\frac{n}{p}\right)$.
$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, kur $\Omega(n) = \alpha_1 + ... + \alpha_l$, ja $n = p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l}$ (*Liuvilla funkcija*).
$\gamma(n) = (-1)^{\omega(n)}$, kur $\omega(n) = l$, ja $n = p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l}$.
$I(n) = \begin{cases} 1, \text{ja } n = 1 \\ 0, \text{ja } n > 1 \end{cases}$.

1.1. teorēma. Vienādojuma

$$f(x) \equiv 0 (\text{mod } n)$$

atrisinājumu klašu mod n skaits $S_f(n)$ ir multiplikatīva funkcija.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $LKD(n_1, n_2) = 1$ un $n = n_1 n_2$.

Vienādojums $f(x) \equiv 0(\text{mod } n)$ ir ekvivalents sistēmai

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0(\text{mod } n_1) \\ f(x) \equiv 0(\text{mod } n_2) \end{cases}$$

Katrai klasei x mod n, kas atrisina vienādojumu atbilst pāris

$$(x(\text{mod } n_1), x(\text{mod } n_1)),$$

kas atrisina sistēmas vienādojumus, šis pāris ir viennozīmīgi noteikts saskaņā ar ķīniešu atlikumu teorēmu.

Otrādi, katram pārim $(x_1(\text{mod } n_1), x_2(\text{mod } n_1))$, kur x_i atrisina vienādojumu $f(x_i) \equiv 0(\text{mod } n_i)$ saskaņā ar ķīniešu atlikumu teorēmu atbilst viena vienādojuma atrisinājumu klase mod n.

Vienādojuma $f(x_i) \equiv 0(\text{mod } n_i)$ atrisinājumu klašu skaits mod n_i ir vienāds ar $S_f(n_i)$. Atrisinājumu pāru skaits ir

$$S_f(n_1)S_f(n_2) = S_f(n).$$

■

1.2.2. Vienkāršākās īpašības

1.2. teorēma. Dots, ka $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_l^{\alpha_l}$. Dots, ka aritmētiska funkcija f ir multiplikatīva. Tad

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) ... f(p_l^{\alpha_l}).$$

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru l.

Indukcijas bāze. Ja $l = 1$, tad nekas nav jāpierāda.

Indukcijas solis. Pieņemsim, ka formula ir spēkā visiem n, kurus dala ne vairāk kā s pirmskaitļi un pierādīsim, ka tad formula ir spēkā visiem n, kurus dala $s+1$ pirmskaitlis.

Ja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s} p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}$, tad

$$LKD(p_1^{\alpha_1} ... p_s^{\alpha_s}, p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}) = 1$$

un saskaņā ar f multiplikativitāti

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}) f(p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}).$$

Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu

$$f(n) = \underbrace{f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s})}_{\text{sadalās}} f(p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}) =$$

$$f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) ... f(p_s^{\alpha_s}) f(p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}).$$

■

1.2. piezīme. No teorēmas seko, ka ja divām multiplikatīvām funkcijām f un g un katram pirmskaitlim p izpildās nosacījums

$$f(p^\alpha) = g(p^\alpha),$$

tad

$$f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3. piezīme. No teorēmas seko, ka multiplikatīvu funkciju var uzdot, brīvi izvēloties lielumus $f(p^\alpha)$, $\forall p, \alpha$.

Ja f ir pilnīgi multiplikatīva, tad to var uzdot brīvi izvēloties lielumus $f(p), \forall p$.

1.3. teorēma. Ja f ir pilnīgi multiplikatīva funkcija, tad

$$f(nm) = f(LKD(n, m))f(MKD(n, m)).$$

PIERĀDĪJUMS Var izmantot vienādību

$$nm = LKD(n, m) \cdot MKD(n, m).$$

Apzīmēsim $LKD(n, m)$ ar d. Redzam, ka

$$n = n'd, m = m'd,$$

kur

$$LKD(n', m') = 1.$$

Zinām, ka

$$MKD(n,m) = n'dm'.$$

Seko, ka

$$f(nm) = f(n'dm') = f(n')f(d)f(m') = f(d)f(n'm') = \\ f(LKD(n,m))f(MKD).$$

■

1.4. teorēma. Ja f ir multiplikatīva funkcija un

$$g(n) = \sum_{m|n} f(m),$$

tad g ir multiplikatīva funkcija.

PIERĀDĪJUMS Ja $LKD(k,l) = 1$, tad kl dalītāji ir viennozīmīgi izsakāmi formā $d = k'l'$, kur $k'|k$, $l'|l$. Var redzēt, ka

$$k' = LKD(d,k), l' = LKD(d,l).$$

Otrādi, katrs pāris (k', l'), kur $k'|k$, $l'|l$, viennozīmīgi nosaka kl dalītāju $d = k'l'$.

Redzam, ka

$$g(kl) = \sum_{d|kl} f(d) = \sum_{k'|k} (\sum_{l'|l} f(k'l')) = \sum_{k'|k} (\sum_{l'|l} f(k')f(l')) =$$
$$\sum_{k'|k} f(k'|k) \sum_{l'|l} f(l'|l) = g(k)g(l).$$

■

1.4. piezīme. $\tau(n)$ un $\sigma(n)$ ir multiplikatīvas, jo

$$\tau(n) = \sum_{m|n} u(m),$$

$$\sigma(n) = \sum_{m|n} N(m) = \sum_{m|n} m.$$

Redzam, ka

$$\tau(p^\alpha) = \alpha + 1,$$

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + ... + p^\alpha,$$

tāpēc varam atrast $\tau(n)$ un $\sigma(n)$ $\forall n$.

1.2.3. Mēbiusa funkcija un inversijas formula

Definēsim *Mēbuisa (Möbius) funkciju* $\mu(n)$ ar vienādību

$$I(n) = \sum_{m|n} \mu(m).$$

1.5. piezīme. Var redzēt, ka $\mu(n)$ definīcija ir rekursīva:

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(n) = -\sum_{l|n, l<n} \mu(l) \end{cases}$$

1.3. piemērs. Apskatīsim dažus piemērus.

1.5. teorēma. (*Mēbiusa inversijas formula*) *Dotas aritmētiskas funkcijas f un g. Tad*

$$g(n) = \sum_{m|n} f(m), \forall n \implies$$

$$f(m) = \sum_{l|m} g(l)\mu(\frac{m}{l}) = \sum_{l|m} g(\frac{m}{l})\mu(l), \forall m.$$

PIERĀDĪJUMS Redzam, ka

$$\sum_{l|m} g(l)\mu(\frac{m}{l}) = \sum_{l|m} g(\frac{m}{l})\mu(l),$$

jo l un $\frac{m}{l}$ ir m dalītāji, kuru reizinājums ir m - summas atšķiras tikai ar locekļu kārtību.

Redzam, ka

$$\sum_{l|m} \underbrace{g(\frac{m}{l})}_{=\sum_{k|\frac{m}{l}} f(k)} \mu(l) = \sum_{l|m} (\sum_{k|\frac{m}{l}} f(k))\mu(l) =$$

$$\sum_{k|m} f(k) \sum_{l|\frac{m}{k}} \mu(l) = \sum_{k|m} f(k) I(\frac{m}{k}) = f(m).$$

■

1.4. piemērs. $\sum_{m|n} \varphi(m) = n.$

1.6. teorēma. Ja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_l^{\alpha_l}$, tad

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, \text{ja } \exists\ \alpha_i > 1; \\ (-1)^l, \text{ja } \forall i\ \alpha_i = 1. \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim definēto funkciju ar μ'. Ievērosim, ka μ' ir multiplikatīva funkcija.

Izmantosim pastiprināto matemātisko indukciju ar parametru n.

Indukcijas bāze $\mu(1) = \mu'(1) = 1$.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka $\mu(m) = \mu'(m)$, $\forall m < n$. Pierādīsim, ka $\mu(n) = \mu'(n)$.

Pierādīsim, ka μ' apmierina tādu pašu sakarību kā μ:

$$\sum_{m|n} \mu'(m) = I(n).$$

Summā $\sum_{m|n} \mu'(m)$ nenulles ieguldījumu dos tikai tie m, kas ir pirmskaitļu pirmo pakāpju reizinājumi. Ja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_l^{\alpha_l}$, $l \geq 1$, tad

$$\sum_{m|n} \mu'(m) = \sum_{r=1}^{l} (-1)^r C_n^r = (1-1)^l = 0.$$

Ja μ un μ' apmierina vienu un to pašu sakarību

$$\sum_{m|n} \mu'(m) = I(n),$$

tad

$$\mu'(n) = - \sum_{m|n, m<n} \mu(m) = \mu(n).$$

■

1.6. piezīme. No teorēmas sako, ka μ ir multiplikatīva funkcija.

1.2.4. Dirihlē reizinājums un tā pielietojumi

Ja f un g ir aritmētiskas funkcijas, tad par to *Dirihlē reizinājumu (konvolūciju)* sauc funkciju $f \star g$, kas ir definēta ar nosacījumu

$$(f \star g)(n) = \sum_{m|n} f(m) g(\frac{n}{m}) = \sum_{mm'=n} f(m) g(m').$$

1.5. piemērs. Mēbiusa inversijas teorēma apgalvo, ka

$$g = f \star u \implies f = g \star \mu = \mu \star g.$$

$\varphi \star u = N.$

1.7. teorēma.

1. $f \star g = g \star f.$
2. $(f \star g) \star h = f \star (g \star h).$
3. $f \star I = I \star f = f.$
4. $f(1) \neq 0 \implies \exists g : f \star g = g \star f = I.$

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no vienādības

$$\sum_{m|n} f(m) g(\frac{n}{m}) = \sum_{mm'=n} f(m) g(m').$$

2.

$$
\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(n) = \sum_{mm'=n} (f \star g)(m) h(m') = \\
\sum_{mm'=n} \Big(\sum_{m''m'''=m} f(m'') g(m''') \Big) h(m') = \\
\sum_{m''m'''m'=n} f(m'') g(m''') h(m')
\end{aligned}
$$

No otras puses -

$$
\begin{aligned}
(f \star (g \star h))(n) = \sum_{mm'=n} f(m) (g \star h)(m') = \\
\sum_{mm'=n} f(m) \Big(\sum_{m''m'''=m'} g(m'') h(m''') \Big) = \\
\sum_{mm''m'''=n} f(m) g(m'') h(m''')
\end{aligned}
$$

Pēc summēšanas indeksu pārapzīmēšanas iegūsim vienādību.

3.

$$(f \star I)(n) = \sum_{m|n} f(m) I(\frac{n}{m}) = f(n) + 0 + ... + 0 = f(n).$$

4. Pierādīsim, ka funkcija g, kas ir definēta ar nosacījumiem

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, \text{ja } n = 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{m|n, m<n} g(m) f(\frac{n}{m}) \end{cases},$$

apmierina īpašību $g \star f = I$. (Ievērosim, ka g ir definēta rekursīvi).

Ja $n = 1$, tad $f(1)g(1) = 1$. Ja $n > 1$, tad

$$(g \star f)(n) = \sum_{m|n} g(m) f(\frac{n}{m}) = g(n) f(1) + \sum_{m|n, m<n} g(m) f(\frac{n}{m}) =$$

$$-\frac{f(1)}{f(1)} \sum_{m|n, m<n} g(m) f(\frac{n}{m}) + \sum_{m|n, m<n} g(m) f(\frac{n}{m}) = 0.$$

■

1.7. piezīme. Teorēma nozīmē to, ka visu aritmētisku funkciju f kopa, kurām $f(1) \neq 0$, kopa ar operāciju $\star$ veido komutatīvu grupu.

1.8. teorēma.

1. $g(n) = \sum_{m|n} f(m) \iff$
$$f(m) = \sum_{k|m} g(k)\mu(\frac{m}{k}) = \sum_{k|m} g(\frac{m}{k})\mu(k).$$
2. Ja f un g ir multiplikatīvas funkcijas un $h = f \star g$, tad h ir multiplikatīva funkcija.
3. Ja $g(n) = \sum_{m|n} f(m)$, tad
$$f \text{ ir multiplikatīva} \iff g \text{ ir multiplikatīva}.$$

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi.
■

1.3. Rīmana ζ-funkcija

1.3.1. Definīcija

Rīmana ζ-funkcija tiek definēta ar vienādību

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1.3.2. Vienkāršākās īpašības

1.9. teorēma.

1. Ja $s > 1$, tad $\zeta(s)$ konverǧē.
2. Ja $s \leq 1$, tad $\zeta(s)$ diverǧē.

PIERĀDĪJUMS
Izmantojam pozitīvu rindu konverǧences Košī integrālo pazīmi -

$$\int_1^{+\infty} x^{-s} dx < \infty \iff s > 1.$$

■

1.10. teorēma. Ja $s > 1$, tad

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

PIERĀDĪJUMS Ievērosim, ka

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots$$

Definēsim

$$P_k(s) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-s}}.$$

Redzam, ka

$$P_k(s) = \sum_{n \in D_k} \frac{1}{n^s},$$

kur kopa D_k satur visus naturālos skaitļus, kas dalās tikai ar pirmajiem k pirmskaitļiem.

$$n \notin D_n \implies n > p_k.$$

$$|P_k(s) - \zeta(s)| = \sum_{n \notin D_k} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n > p_k} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n \leq p_k} \frac{1}{n^s}.$$

Redzam, ka

$$k \to \infty \implies \zeta(s) - \sum_{n \leq p_k} \frac{1}{n^s} \to 0.$$

■

2. 15.mājasdarbs

15.1 Vai $f_k(n) = MKD(n, k)$ ir multiplikatīva funkcija?

15.2 Pierādiet, ka Liuvilla funkcija ir multiplikatīva.

15.3 Atrodiet tādas aritmētiskas funkcijas piemēru, kas ir multiplikatīva, bet ne pilnīgi multiplikatīva.

15.4 Izmantojot vienādību $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ pierādīt, ka

$$\varphi(n) = \sum_{m|n} \frac{\mu(m)n}{m}.$$