DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Veselo skaitļu teorija

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Skaitļu kopas

1.1. Naturālie skaitļi

Naturāls skaitlis - skaitlis, ko var iegūt dabiskā skaitīšanas ceļā

$$\{1, 2, 3...\}$$

Visu naturālo skaitļu kopu apzīmēsim ar $\mathbb{N}$.

Naturālo skaitļu kopa ir mazākās bezgalīgās kopas etalons, to izmanto salīdzināšanai ar citām bezgalīgām kopām - bezgalīgu kopu A sauksim par *sanumurējamu*, ja eksistē bijektīva (savstarpēji viennozīmīga) funkcija no $\mathbb{N}$ uz A.

Dabiskās darbības (*aritmētiskās operācijas*) ar naturālajiem skaitļiem -

saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana.

Naturālo skaitļu kopu kā kopu ar saskaitīšanas un reizināšanas operācijām apzīmēsim kā $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Naturālo skaitļu kopā var dabiski definēt sakārtojuma attiecību $<$. Teiksim, ka $x < y$, ja starpība $y - x$ ir definēta kā naturāls skaitlis.

Problēma - naturālo skaitļu kopa *nav slēgta* attiecībā uz atņemšanu un dalīšanu - divu naturālu skaitļu starpība vai dalījums var nebūt naturāls skaitlis (piemēram, $1 - 2$ vai $1/2$).

Vēsturiski lietojamo skaitļu kopa tika paplašināta vairākos soļos saglabājot aritmētisko operāciju īpašības.

Naturālā skaitļa ģeometriskā interpretācija - garums (piemēram, soļu skaits).

1.2. Naturālo skaitļu kopas paplašinājumi

Skaitlis 0 tiek definēts kā jebkuras starpības $n - n$ rezultāts, kur $n \in \mathbb{N}$.

Vesels skaitlis - divu naturālu skaitļu starpības rezultāts, piemēram

$$-1 = 2 - 3, 0 = 3 - 3.$$

Veselos skaitļus iegūst no naturālajiem, pievienojot visas formālās starpības. Apzīmējums: ja $n \in \mathbb{N}$ un $n + x = 0$, tad x tiek apzīmēts kā $-n$. Visu veselo skaitļu kopu apzīmē ar $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Ievērosim, ka veselo skaitļu kopa ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu un atņemšanu - divu veselu skaitļu summa un starpība ir vesels skaitlis. Ievērosim arī to, ka veselo skaitļu kopa nav slēgta attiecībā uz dalīšanu ($\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

Veselo skaitļu ģeometriskā interpretācija - orientētais garums, skaitļu ass punkti ar veselām koordinātēm.

Nākamais skaitļu kopas paplašināšanas solis - pievienot visus iespējamos dalījumus.

Racionāls skaitlis - formāls divu veselu skaitļu dalījums.Ja $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ un $nx = m$, tad apzīmēsim x ar $\frac{m}{n}$. Visu racionālu skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Q}$.

Nākamie skaitļu kopas paplašināšanas soļi ir saistīti ar vienādojumu sakņu un virkņu robežu pievienošanu.

Algebrisks skaitlis - reāla sakne algebriskam vienādojumam ar racionāliem koeficientiem, piemēram, $\sqrt{2}$ ir sakne vienādojumam

$$x^2 = 2.$$

Visu algebrisku skaitļu kopu apzīmē ar $\overline{\mathbb{Q}}$.

Reāls skaitlis - algebrisko skaitļu kopas papildinājums pievienojot visas konverģējošu racionālu vai algebrisku skaitļu virkņu robežas, visu reālu skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{R}$.

Reālajiem skaitļiem ir šāda dabiska ģeometriska interpretācija: reālam skaitlim x atbilst punkts uz taisnes, kuram attālums līdz izdalītam punktam O ir vienāds ar $|x|$, un kurš atrodas labajā vai kreisajā pusē attiecībā uz O atkarībā no x zīmes.

Reālo skaitļu kopā var arī dabiskā veidā vispārināt naturālo skaitļu sakārtojuma attiecību.

Iracionāls skaitlis - reāls skaitlis, kas nav racionāls (piemēram $\sqrt{2}$).

Ievērosim, ka reālo skaitļu kopa nav slēgta attiecībā uz algebrisku vienādojumu risināšanu ar reāliem koeficientiem. Piemēram, vienādojuma

$$x^2 = -1$$

sakne nevar būt reāls skaitlis.

Komplekss skaitlis - sakne algebriskam vienādojumam ar reāliem koeficientiem, visu kompleksu skaitļu kopu apzīmē ar C. Kompleksos skaitļus ir dabiski interpretēt kā punktus plaknē.

2. Veselo skaitļu pamatīpašības

2.1. Kopteorētiskās pamatīpašības

Brīdinājums. Šajā kursā daži apgalvojumi attiecas uz visu veselo skaitļu kopu, bet daži - uz naturālo skaitļu kopu. Būsim uzmanīgi!

2.1. teorēma. $\mathbb{N}$ un $\mathbb{Z}$ ir bezgalīgas sanumurējamas kopas.

PIERĀDĪJUMS Nav acīmredzami, ka $\mathbb{Z}$ ir sanumurējama. Uzrādīsim bijektīvu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Definēsim f šādi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1, & \text{ja } x \text{ ir pāra skaitlis,} \\ -(\frac{x-1}{2} + 1), & \text{ja } x \text{ ir nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Jāpārbauda, ka f ir injektīva un sirjektīva:

- ja $x = 2n$ ir pāra skaitlis, tad

$$f(x) = f(2n) = n - 1,$$

tādējādi pāra skaitļu kopa tiek attēlota uz nenegatīvo veselo skaitļu kopu,

- ja $x = 2n + 1$ ir nepāra skaitlis, tad

$$f(x) = f(2n + 1) = -n - 1,$$

tādējādi nepāra skaitļu kopa tiek attēlota uz negatīvo veselo skaitļu kopu.

■

2.2. teorēma. Jebkuriem veseliem skaitļiem x un y ir spēkā tieši viens no šādiem gadījumiem:

$$x = y,\ x < y \text{ vai } x > y.$$

2.3. teorēma. Attiecība $\leq$ ir *tranzitīva*: ja $x \leq y$ un $y \leq z$, tad $x \leq z$.

2.4. teorēma. (*Pilnīgā sakārtojums princips*) *Jebkura kopas $\mathbb{N}$ apakškopa satur vismazāko elementu.*

2.5. teorēma. ((*Maksimālā elementa princips*) Jebkura kopas $\mathbb{N}$ apakškopa, kas ir ierobežota no augšas, satur maksimālo elementu.)

2.6. teorēma. (*Matemātiskās indukcijas princips*) Pieņemsim, ka katram $n \in \mathbb{N}$ ir definēts apgalvojums $P(n)$ un ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. $P(1)$ ir patiess,
2. ja $P(i)$ ir patiess, tad $P(i+1)$ ir patiess visiem $i \in \mathbb{N}$.

Tad visiem $n \in \mathbb{N}$ apgalvojums $P(n)$ ir patiess.

2.7. teorēma. Katram reālam skaitlim x eksistē viens un tikai viens

1. lielākais veselais skaitlis $[x]$(x veselā daļa jeb *grīda*, apzīmē arī kā $\lfloor x \rfloor$), kas nav lielāks par x,
2. mazākais veselais skaitlis $\lceil x \rceil$ (x *griesti*), kas nav mazāks par x.

(šai teorēmai ir uzskatāma ģeometriska interpretācija - katrs punkts uz reālo skaitļu taisnes atrodas starp diviem viennozīmīgi noteiktiem tuvākajiem punktiem ar veselām koordinātēm).

2.2. Aritmētiskās pamatīpašības

2.8. teorēma. Ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. divu veselu skaitļu summa un reizinājums ir vesels skaitlis (veselo skaitļu kopa ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu un reizināšanu),
2. $a + b = b + a$ (saskaitīšanas komutativitātes likums),
3. $ab = ba$ (reizināšanas komutativitātes likums),
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (saskaitīšanas asociativitātes likums),
5. $(ab)c = a(bc)$ (reizināšanas asociativitātes likums),
6. $a + 0 = a$ (saskaitīšanas neitrālā elementa eksistence),
7. ja $a+x = a$, tad $x = 0$ (saskaitīšanas neitrālā elementa vienīgums),
8. $a \cdot 1 = a$ (reizināšanas neitrālā elementa eksistence),
9. ja $ax = a$, tad $x = 1$ (reizināšanas neitrālā elementa vienīgums),
10. $a(b + c) = ab + ac$ (distributativitātes likums),
11. ja $ab = 0$, tad $a = 0$ vai $b = 0$ (nulles dalītāju neeksistence),
12. ja $a \neq 0$ un $ab = ac$, tad $b = c$ (reizināšanas saīsināšanas īpašība).

3. Veselo skaitļu dalīšana ar atlikumu

3.1. teorēma. (*Par veselu skaitļu dalīšanu ar atlikumu*) Katram veselam skaitlim a, kas nav vienāds ar 0 un katram veselam skaitlim b eksistē viens un tikai viens veselu skaitļu pāris (q, r) tāds, ka

$$0 \leq r < |a|$$

un ir spēkā vienādība

$$b = qa + r$$

(q sauksim par *dalījumu*, r - par *atlikumu*)

PIERĀDĪJUMS

Ģeometriskais pierādījums. Atzīmēsim uz taisnes ar Dekarta koordinātēm visus punktus, kurus koordinātes ir vienādas ar ka, kur $k \in \mathbb{Z}$.

Jebkurš vesels skaitlis b ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$b = qa + r,$$

kur qa ir pirmais atzīmētais punkts pa kreisi no b un $0 \leq r < |a|$.

Analītiskais pierādījums. Apskatīsim skaitli $\frac{b}{a}$, kas ir acīmredzami racionāls skaitlis. Jebkuru racionālu skaitli r var viennozīmīgi izteikt formā

$$r = [r] + r',$$

kur $r' \in \mathbb{Q}, 0 \leq r' < 1$ un formā

$$r = \lceil r \rceil + r'',$$

kur $r'' \in \mathbb{Q}, -1 < r'' \leq 0$.

Ja $a > 0$, tad izteiksim $\frac{b}{a}$ summā izmantojot veselo daļu (grīdu), tātad

$$\frac{b}{a} = q + q'$$

Reizinot abas puses ar a, iegūsim

$$b = qa + q'a = qa + r.$$

Tā kā $0 \leq q' < 1$, tad $0 \leq q'a < a$.

Ja $a < 0$, tad izteiksim $\frac{b}{a}$ summā izmantojot griestus, tātad

$$\frac{b}{a} = q + q'',$$

kur $-1 < q'' \leq 0$. Reizinot abas puses ar a, iegūsim

$$b = qa + q''a = qa + r.$$

Tā kā $-1 < q'' \leq 0$, tad $0 \leq q''a < a$.

Pierādīsim tagad, ka izvirzījums $b = qa + r$ ar dotajām īpašībām ir noteikts viennozīmīgi. Pieņemsim, ka eksistē skaitļu pāris a, b, tāds ka b var izteikt divos veidos

$$b = q_1 a + r_1 = q_2 a + r_2.$$

Izdalot šīs vienādības ar a, iegūsim vienādības

$$\tfrac{b}{a} = q_1 + \tfrac{r_1}{a} = q_2 + \tfrac{r_2}{a},$$

kur izvirzījumi labajās pusēs apmierina nosacījums, kas tika formulēti pierādījuma sākumā. Tā kā šādi izvirzījumi ir noteikti viennozīmīgi, tad $q_1 = q_2$ un $r_1 = r_2$.$\blacksquare$

4. Veselo skaitļu dalāmības attiecība

4.1. Dalāmības pamatīpašības

Atsevišķi pētīsim gadījumu $r = 0$.

Teiksim, ka vesels skaitlis a *dala* veselu skaitli b vai, ka b *dalās ar* a (apzīmē ar pierakstu $a|b$) tad un tikai tad, ja eksistē vesels skaitlis q tāds, ka

$$b = qa$$

(atlikums ir vienāds ar 0). Ja a nedala b, tad šo faktu apzīmē ar pierakstu $a \nmid b$.

Svarīgs speciālgadījums: ja $2|a$, tad a sauksim par *pāra skaitli*, ja $2 \nmid a$, tad a ir *nepāra skaitlis*.

Dalāmība definē attiecību $\rho = |$ visu veselo skaitļu kopā.

4.1. teorēma. Dalāmības attiecības sašaurinājumam uz naturālo skaitļu kopu piemīt šādas īpašības:

1. *refleksīvitāte* - katrs naturāls skaitlis dala pats sevi - $a|a$;
2. antisimetrija - ja $a|b$ un $b|a$, tad $a = b$;
3. tranzitivitāte - ja $a|b$ un $b|c$, tad $a|c$;
4. ja $a|b$, tad $a \leq b$.

PIERĀDĪJUMS

1. $a = 1 \cdot a$.

2. Ja $a|b$ un $b|a$, tad $b = qa$ un $a = q'b$, tātad $b = qa = (qq')b$ un $qq' = 1$, tāpēc $a = b$.

3. Ja $a|b$ un $b|c$, tad $b = qa$ un $c = q'b$, tātad $c = q'b = (q'q)a$ un $a|c$.

4. Ja $a|b$, tad $b = qa$, tātad $\frac{b}{a} = q \geq 1$ un $b \geq a$.

■

4.1. piezīme. Veseliem skaitļiem a, b ir spēkā šāds apgalvojums: ja $a|b$ un $b|a$, tad $a = \pm b$.

4.1. piemērs. Jebkurš skaitlis dala skaitli 0, skaitlis 0 nedala nevienu citu skaitli, izņemot 0, skaitļi 1 un -1 dala visus veselos skaitļus, skaitļi 1 un -1 dalās tikai ar 1 un -1.

4.2. piezīme. Naturālo skaitļu dalāmības attiecību var attēlot ar *Hasses grafu*, kas tiek definēts šādi:

- virsotnes ir naturālie skaitļi,
- divas virsotnes a un b ir savienotas ar šķautni $a \leftarrow b$, ja $a|b$ un neeksistē skaitlis $c, a < c < b$ tāds, ka $a|c$ un $c|b$.

4.2. teorēma.

1. Ja veseliem skaitļiem $a, b_1, ..., b_n$ izpildās nosacījumi
$$a|b_1,\ a|b_2,\ ...,\ a|b_n,$$
tad
$$a|(b_1 + ... + b_n).$$
2. ja $a|b$, tad katram $c \in \mathbb{Z}$ izpildās $a|bc$.
3. ja $a|b$ un $c|d$, tad $ac|bd$.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja $a|b_1$, $a|b_2$, ..., $a|b_n$, tad $b_i = q_i a$ katram i, tātad
$$\sum_{i=1}^{n} b_i = a \sum_{i=1}^{n} q_i = aq,$$
kur q ir vesels skaitlis.
2. Ja $a|b$, tad $b = qa$ un $bc = (qc)a$.
3. Ja $a|b$, tad $b = q_1 a$. Ja $c|d$, tad $d = q_2 c$. Tādējādi
$$bd = (q_1 a)(q_2 c) = (q_1 q_2)(ac).$$

■

4.2. Pirmskaitļi un to pamatīpašības

Naturālu skaitli sauksim par *pirmskaitli*, ja tas ir naturāls skaitlis, kuram ir tieši divi dažādi naturāli dalītāji.

Naturālu skaitli, kas nav pirmskaitlis un nav vienāds ar 1, sauksim par *saliktu skaitli*.

Naturāls skaitlis ir vai nu 1, vai pirmskaitlis vai salikts skaitlis.

4.2. piemērs. $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ir pirmskaitļi. $4 = 2 \times 2$ nav pirmskaitlis.

4.3. teorēma. Katram saliktam naturālam skaitlim ir vismaz viens dalītājs, kas ir pirmskaitlis.

PIERĀDĪJUMS Apskatīsim salikta skaitļa a dalītāju kopu, tajā ir vismaz trīs elementi - 1, a un vismaz vēl viens. Apskatīsim mazāko no dalītājiem b, kas nav 1. b obligāti ir pirmskaitlis, jo pretējā gadījumā skaitlim a ir vēl mazāki dalītāji (b dalītāji), kas nav 1.■

4.4. teorēma. (Eiklīds, Senā Grieķija, ap 300BC) Pirmskaitļu kopa ir bezgalīga.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim pretējo. Pieņemsim, ka pirmskaitļu kopa ir galīga kopa $p_1, ..., p_n$. Apskatīsim skaitli

$$N = p_1 p_2 ... p_n + 1. \tag{1}$$

N ir vai nu 1, vai pirmskaitlis, vai salikts skaitlis. Dalot N ar katru no skaitļiem p_i, atlikumā iegūsim 1, tātad N ir pirmskaitlis. N ir lielāks nekā jebkurš kopas $\{p_1, ..., p_n\}$ elements, tātad ir iegūta pretruna.■

5. 1.mājasdarbs

1. Izmantojot matemātisko indukciju pierādiet vienādību

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (Norādījums: pieņemiet, ka formula ir pareiza, ja $n = k$ un pierādiet, ka no šī pieņēmuma seko formulas pareizība, ja $n = k + 1$.)

2. Izdaliet ar atlikumu dotos veselo skaitļu pārus: 1) 32 ar 3, 2) 324 ar -19, 3) 293742983472983 ar 3792.

3. Atrodiet visus naturālos skaitļus, kas dala 168.

4. Atrodiet visus pirmskaitļus, kas ir mazāki kā 100.

5. Atrodiet visus naturālos skaitļus n, kuriem $n^3 - 1$ ir pirmskaitlis. (Norādījums: sadaliet polinomu $n^3 - 1$ reizinātājos -

$$n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$$

   un izmantojiet to faktu, ka pirmskaitlim ir tikai divi dalītāji.)