DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt ortogonālo projicēšanu.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt apakštelpas *papildinošo apakštelpu*,
- var definēt un pētīt *ortogonālo projekciju* uz apakštelpu.

Svarīgākie jēdzieni: tiešā summa, papildinošā apakštelpa, ortoprojekcija.

Svarīgākie fakti un metodes: ortoprojekcijas īpašības, ortoprojekciju normu īpašības, ortoprojekcijas ekstremālā īpašība.

1. Tiešā summa un papildinošā apakštelpa

1.1. Definīcija

$$\begin{cases} V, W \leq L. \\ V \cap W = \{0\} \ (\dim V \cap W = 0). \end{cases}$$

Tad $V + W$ sauc par *(iekšējo) tiešo summu* $V \oplus W$.

1.2. Papildinošā apakštelpa

Ja $V \oplus W = L$, tad W sauc par *papildinošo apakštelpu* attiecībā uz V (apzīmē- $W = V^p$), un otrādi ($V = W^p$).

1.1. teorēma. L - LT, $V \leq L$.

1. $\exists\, W \leq L : \ V \oplus W = L$.
2. $L = V \oplus W \iff \forall\, \mathbf{l} \in L \ \exists$ viennozīmīgi noteikti $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ ($\mathbf{l}$ *projekcijas*): $\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, turpināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$.

Apskatīsim $W = \langle \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \rangle$. Redzam, ka $V + W = L$.

Pierādīsim, ka $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Pieņemsim, ka $\mathbf{t} \in V \cap W \implies$

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j .$$

$\mathbf{t} \neq \mathbf{0} \implies \exists\ \lambda_i \neq 0 \implies \overline{\mathcal{B}}$.

2. $\underline{\implies}$ Atradīsim apakštelpu V un W bāzes $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$.

$\forall\ \mathbf{l} \in L$ var izteikt formā

$$\mathbf{l} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j}_{=\mathbf{w}} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{cases}$$

$\underline{\Longleftarrow}$

$\forall\, \mathbf{l}$ var izteikt summas veidā $\implies L = V + W$.

$V \cap W \neq \{\mathbf{0}\} \implies \mathbf{t} \in V \cap W$ var izteikt summas veidā divējādi:

$$\mathbf{t} = \underbrace{\mathbf{t}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{t}}_{\in W}.$$

■

1.1. piezīme. Papildinošā apakštelpa nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita speciālgadījumus.

1.1. piemērs. Vektori. Matricas. Polinomi.

2. Ortogonālā projekcija

2.1. Ortogonālā papildinājuma īpašības

2.1. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET.

$$\begin{cases} V \cap V^{\perp} = \mathbf{0} \\ V + V^{\perp} = E \end{cases} \quad (E = V \oplus V^{\perp}).$$

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{t} \in V \cap V^{\perp} \Longrightarrow < \mathbf{t}|\mathbf{t} >= \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{t} = \mathbf{0}$.

Atradīsim V ortonormētu bāzi $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$, papildināsim to līdz E ortonormētai bāzei $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ (tas ir iespējams, skat. Grama-Šmita teorēmu).

Var redzēt,ka $\{\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir ortonormēta bāze telpai $V^{\perp}$, jo $V^{\perp}$ satur tieši elementu $\mathbf{e}_{m+1}$,...,$\mathbf{e}_n$ lineāras kombinācijas.

$$\forall\ \mathbf{v} \in E\colon\ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i}_{\in V^\perp} \implies E = V + V^\perp.$$

■

2.2. Projekcijas uz ortogonāli papildinošām apakštelpām

Agrāk tika pierādīts:

1. $E = V \oplus V^\perp$.
2. $\forall\ \mathbf{t} \in E : \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{kur } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V^\perp \\ < \mathbf{v} | \mathbf{w} >= 0 \\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ir noteikti viennozīmīgi.} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\} - V \text{ bāze} \\ \{\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n\} - V^\perp \text{ bāze} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} < \mathbf{t} | \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} = \sum_{i=m+1}^{n} < \mathbf{t} | \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \end{cases}$

2.1. piezīme. $\begin{cases} \mathbf{v} = p_V(\mathbf{t}) =\in V \\ \mathbf{w} = p_{V^\perp}(\mathbf{t}) \in V^\perp \end{cases}.$

2.2. teorēma. *E - ET, $V \leq E$. Tad*

$$||\mathbf{t}||^2 = ||p_V(\mathbf{t})||^2 + ||p_{V^\perp}(\mathbf{t})||^2.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\mathbf{v} = p_V(\mathbf{t})$, $\mathbf{w} = p_{V^\perp}(\mathbf{t})$.

$||\mathbf{t}||^2 = ||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v}+\mathbf{w}|\mathbf{v}+\mathbf{w} >=$

$< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}_{=0} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >= ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2.$ ■

2.3. Labākās aproksimācijas īpašība

2.3. teorēma. *E - ET, $V \leq E$. $\forall$ t $\in E$:*

1. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| \leq ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||, \forall\ \mathbf{v} \in V;$
2. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| = ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||$, kur $\mathbf{v} \in V \iff \mathbf{v} = p_V(\mathbf{t})$.
3. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| = \min\limits_{\mathbf{v}\in V} ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||.$

PIERĀDĪJUMS

$$\mathbf{t}-\mathbf{v}=\mathbf{t}-\mathbf{v}\pm p_V(\mathbf{t})=\underbrace{(\mathbf{t}-p_V(\mathbf{t}))}_{\in V^\perp}-\underbrace{(\mathbf{v}-p_V(\mathbf{t}))}_{\in V}\Longrightarrow$$

$$||\mathbf{t}-\mathbf{v}||^2=||\mathbf{t}-p_V(\mathbf{t})||^2+||\mathbf{v}-p_V(\mathbf{t})||^2\Longrightarrow$$

$$\mathbf{v}-p_V(\mathbf{t})=0\iff ||\mathbf{t}-\mathbf{v}||^2=||\mathbf{t}-p_V(\mathbf{t})||^2.$$

$$\mathbf{v}-p_V(\mathbf{t})\neq 0\iff ||\mathbf{t}-\mathbf{v}||^2<||\mathbf{t}-p_V(\mathbf{t})||^2.\ \blacksquare$$

2.1. piemērs. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

3. Lineārie attēlojumi Eiklīda telpās

3.1. Matricu pārnešana skalārajā reizinājumā

3.1. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET. $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - ortonormēta bāze. $\mathbf{A}$ operatora matrica, kas darbojas ET E. Tad

1. $< \mathbf{v}|\mathbf{A}\mathbf{w} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{v}|\mathbf{w} >$.
2. $< \mathbf{A}\mathbf{v}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{A}^T\mathbf{w} >$.

PIERĀDĪJUMS Skalārā reizinājuma matrica ir $\mathbf{E}$.

1. $< \mathbf{v}|\mathbf{A}\mathbf{w} >= \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{w} = (\mathbf{A}^T\mathbf{v})^T\mathbf{w} =< \mathbf{A}^T\mathbf{v}|\mathbf{w} >$.

2. Līdzīgi.■

3.2. Izometriskie lineārie attēlojumi

E, E' - ET. LI $f : E \longrightarrow E'$ sauc par *izometriju*, ja

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E : < \mathbf{v}|\mathbf{w} >=< f(\mathbf{v})|f(\mathbf{w}) > .$$

3.1. piezīme. Izometrija saglabā normu:
$||\mathbf{v}||^2 =< \mathbf{v}|\mathbf{v} >=< f(\mathbf{v})|f(\mathbf{v}) >= ||f(\mathbf{v})||^2$.

3.1. piemērs. Rotācija, simetrija.

3.2. teorēma. E, E' - ET, $\dim E = \dim E' = n$. Tad $\exists$ izometrija $f : E \longrightarrow E'$.

PIERĀDĪJUMS Izvēlēsimies E un E' ortonormētas bāzes $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$.

Definēsim

$$f_0 : \mathcal{B} \longrightarrow E'$$
$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \forall\ i$$

un turpināsim to līdz lineāram attēlojumam

$$f : E \longrightarrow E'$$
$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}'_i.$$

$$< \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\Big)\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j\Big) >= \sum_{i,j} v_i w_j < \mathbf{e}_i \Big| \mathbf{e}_j >=$$

$$\sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{< \mathbf{e}_i \Big| \mathbf{e}_j >}_{=\delta_{ij}} = \sum_i v_i w_i.$$

$$< f\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\Big) \Big| f\Big(\sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j\Big) >= \sum_{i,j} v_i w_j < f(\mathbf{e}_i) \Big| f(\mathbf{e}_j) >=$$

$$\sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{< \mathbf{e}'_i \Big| \mathbf{e}'_j >}_{=\delta_{ij}} = \sum_i v_i w_i. \blacksquare$$

4. 9.mājasdarbs

4.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Atrast apakštelpas V papildinošo apakštelpu V^p (aprakstīt V^p bāzi).

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \{(2, -1)\}$;
(b) $L = \mathbb{R}^3$, $V = \langle (0, 1, -1), (1, 0, 1) \rangle$;
(c) $L = \mathcal{M}at(2, 2, \mathbb{R})$, V - antisimetrisku matricu kopa.

9.2 Atrast ET E (ar standarta skalāro reizinājumu) elementa $\mathbf{t}$ ortoprojekcijas uz V un $V^{\perp}$.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{t} = \left[\frac{3}{4}\right]$, $V = \left\langle \left[\frac{1}{1}\right] \right\rangle$;

(b) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{t} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \end{array}\right]$, $V = \left\langle \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \end{array}\right] \right\rangle$;

(c) $E = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$;

9.3 Dots: E, $\mathbf{l} \in E$, $V \leq E$. Atrast $\mathbf{v} \in V$ tādu, ka $||\mathbf{l} - \mathbf{v}||$ ir minimāla.

(a) $E = \mathbb{R}^3$, standarta skalārais reizinājums, $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$V = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

(b) $E = \mathbb{R}[X]_3$, skalārais reizinājums uzdots ar formulu

$< f|g >= \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$,

$\mathbf{l} = X^2 - X + 2$, $V = \left\langle X - 1, X^3 - 1 \right\rangle$.