DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt pamatfaktus par ortonormētām bāzēm un ortonormēšanas algoritmu.

Lekcijas kopsavilkums:

- jebkuru bāzi Eiklīda telpā var pārveidot par ortonormētu bāzi.

Svarīgākie jēdzieni: ortonormēta kopa, ortonormēta bāze.

Svarīgākie fakti un metodes: ortogonālas kopas lineāra neatkarība, Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms.

1. Ortonormētas bāzes

1.1. Pamatfakti

E - ET. $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par *ortogonāliem* ($\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$), ja $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0$.

- $S \subseteq E$ sauc par *ortogonālu kopu*, ja $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$;
- $S \subseteq E$ sauc par *normētu kopu*, ja $< \mathbf{v}|\mathbf{v} >= 1, \forall\ \mathbf{v} \in S$;
- $S \subseteq E$ sauc par *ortonormētu kopu*, ja

$$< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= \begin{cases} 1, & \text{ja } \mathbf{v} = \mathbf{w} \\ 0, & \text{ja } \mathbf{v} \neq \mathbf{w} \end{cases} , \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in S.$$

1.1. teorēma. E - ET, $S \subseteq E$: S - ortogonāla nenulles elementu kopa. Tad $\underline{S}$.

PIERĀDĪJUMS $S = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_m\}$.

Pieņemsim pretējo: $\overline{S} \Longrightarrow \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m$:

- $\exists\ \lambda_j \neq 0$;
- $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$.

Apskatīsim $< \cdot|\mathbf{s}_j >$:

$$< \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i \right) |\mathbf{s}_j >= \underbrace{< \mathbf{0}|\mathbf{s}_j >}_{=0} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i < \mathbf{s}_i|\mathbf{s}_j >= 0 \Longrightarrow \lambda_j < \mathbf{s}_j|\mathbf{s}_j >= 0 \Longrightarrow$$

$\lambda_j||\mathbf{s}_j||^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0$ vai $||\mathbf{s}_j|| = 0$ - pretruna jebkurā gadījumā. ■

E bāzi sauc par *ortonormētu bāzi*, ja tā ir ortonormēta kopa.

1.1. piemērs. $\mathbb{R}^n$ kanoniskā bāze - ortonormēta attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.

1.2. Elementa koordinātes ortonormētā bāzē

1.2. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET, $\mathcal{O} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ ortonormēt
bāze. $\forall\ \mathbf{v} \in E$ izpildās šādas vienādības

1. $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$;
2. $||\mathbf{v}||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i >^2$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{v}$ viennozīmīgi izsakās kā $\mathcal{O}$ elementu lineāra kombinācija: $\mathbf{v} = \sum\limits_{n=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i$.

Aprēķinot skalāros reizinājumus ar visiem $\mathbf{e}_j$, iegūsim šādu sistēmu:

$$\begin{cases} <\mathbf{v}|\mathbf{e}_1>=<\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_1>=c_1<\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1>=c_1 \\ <\mathbf{v}|\mathbf{e}_2>=<\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_2>=c_2<\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2>=c_2 \\ \ldots \\ <\mathbf{v}|\mathbf{e}_n>=<\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_n>=c_n<\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n>=c_n. \end{cases}$$

2. $<\mathbf{v}|\mathbf{v}>=<\sum\limits_{i=1}^{n}<\mathbf{v}|\mathbf{e}_i>\mathbf{e}_i\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}<\mathbf{v}|\mathbf{e}_j>\mathbf{e}_j>=$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_ic_j<\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j> = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n}<\mathbf{v}|\mathbf{e}_i>^2.$$

■

1.3. Apakštelpas ortogonālais papildinājums

E - ET, $V \subseteq E$. Par V *ortogonālo papildinājumu* sauc kopu $V^\perp$:

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in E | \langle \mathbf{x} | \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \ \mathbf{v} \in V\}.$$

1.2. piemērs. $E = \mathbb{R}^3$, $L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \hline y \\ \hline 0 \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Tad

$$L^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \hline z \end{bmatrix} \right\rangle.$$

1.3. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET.

1. $V \leq E \implies V^\perp \leq E$.
2. $V \leq W \implies W^\perp \leq V^\perp$.
3. $V \cap V^\perp = \mathbf{0}$.
4. $V = \langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \rangle \implies \Big(\mathbf{w} \in V^\perp \iff \forall \ i \ < \mathbf{w} | \mathbf{v}_i >= 0 \Big)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\perp} \Longrightarrow \begin{cases} <\mathbf{v}|\mathbf{w}>=0 \\ <\mathbf{v}|\mathbf{w}'>=0, \forall\ \mathbf{v} \in V \end{cases} \Longrightarrow$
$<\mathbf{v}|\lambda\mathbf{w}+\mu\mathbf{w}'>=0 \Longrightarrow \lambda\mathbf{w}+\mu\mathbf{w}' \in V^{\perp} \Longrightarrow V^{\perp} \leq E.$

2. $\mathbf{t} \in W^{\perp} \Longrightarrow <\mathbf{t}|\underbrace{\mathbf{v}}_{\in V \subseteq W}>=0 \Longrightarrow \mathbf{t} \in V^{\perp} \Longrightarrow W^{\perp} \subseteq V^{\perp}.$

3. $\mathbf{t} \in V \cap V^{\perp} \Longrightarrow <\mathbf{t}|\mathbf{t}>=\mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{t}=\mathbf{0}.$

4. $\Longrightarrow$ - seko no definīcijas.

$\forall\ i\ <\mathbf{w}|\mathbf{v}_i>=0 \Longrightarrow \forall\ \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i\ <\mathbf{w}|\mathbf{v}>=<\mathbf{w}|\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i>=$
$\sum_{i=1}^{k} c_i<\mathbf{w}|\mathbf{v}_i>=0.$ ■

1.4. Grama-Šmita ortonormalizācijas algoritms

1.4.1. Normēšana

E - ET. $\forall\ S \in E$ var pārveidot par normētu kopu:

$$\forall\ \mathbf{v} \in E \text{ definēsim } \mathbf{v}^\star = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v} \implies ||\mathbf{v}^\star|| = \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = 1.$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l\} \implies S^\star = \{\mathbf{v}_1^\star, ..., \mathbf{v}_l^\star\} \text{ - normēta.}$$

1.4.2. Divu elementu kopas ortonormēšana

Pieņemsim, ka ir doti 2 lineāri neatkarīgi elementi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Tos var modificēt par ortonormētiem elementiem $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ ar šādiem soļiem:

1. normēt elementu $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{||\mathbf{e}_1||}\mathbf{e}_1;$$

2. aizvietot $\mathbf{e}_2$ ar elementu $\mathbf{h}_2$ tādu, ka $< \mathbf{h}_2|\mathbf{g}_1 >= 0$, meklēsim $\mathbf{h}_2$ šādā formā:
$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_2 + c\mathbf{g}_1.$$
$$< \mathbf{h}_2|\mathbf{g}_1 >=< \mathbf{e}_2 + c\mathbf{g}_1|\mathbf{g}_1 >=< \mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1 > +c\underbrace{< \mathbf{g}_1|\mathbf{g}_1 >}_{=1} = 0$$
$$\Longrightarrow \; c = - < \mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1 > \; \Longrightarrow \; \mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1 > \mathbf{g}_1;$$
3. normēt elementu $\mathbf{h}_2$:
$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{||\mathbf{h}_2||}\mathbf{h}_2.$$

1.4.3. Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms

Klasiskais apraksts

E - galīgi dimensionāla ET, $\underline{\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}}$.

Konstruēsim elementu virkni $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ saskaņā ar šādu algoritmu:

1. $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1^\star$ - normējam pirmo bāzes elementu;
2. $\mathbf{g}_2 = \Big(\mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1 > \mathbf{g}_1\Big)^\star$ - panākam, ka otrais bāzes elements ir ortogonāls pirmajam un ir normēts, pēc šī soļa pirmie divi jaunās bāzes elementi ir ortonormēti;
3. $\mathbf{g}_3 = \Big(\mathbf{e}_3 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{g}_2 > \mathbf{g}_2 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{g}_1 > \mathbf{g}_1\Big)^\star$ - panākam, ka trešais jaunās bāzes elements ir ortogonāls pirmajiem diviem un ir normēts, pēc šī soļa pirmie trīs jaunās bāzes elementi ir ortonormēti;
4. ...

l. $\mathbf{g}_l = \Big(\mathbf{e}_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i\Big)^\star$ - panākam, ka visi l jaunās bāzes elementi ir ortonormēti.

Matricu formālisma izmantošana

E - galīgi dimensionāla ET, $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}$.

Elementus $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l$ izteiksim attiecībā uz kādu bāzi $\mathcal{B}$. To koordinātu kolonnas savienosim matricā

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|...|\mathbf{e}_l] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1l} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2l} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nl} \end{array}\right]$$

Meklēsim ortonormētas bāzes koordinātu kolonnas attiecībā uz to pašu bāzi $\mathcal{B}$ saskaņā ar šādu algoritmu, kas sastāv no KEP virknes.

1. $K_1\left(\dfrac{1}{||\mathbf{e}_1||}\right)$ - normējam pirmā bāzes elementa koordinātu kolonnu;
2. $\underbrace{K_{12}(- < \mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1 >)}_{\text{ortogonalizācija}}, \underbrace{K_2\left(\dfrac{1}{||\mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_1||}\right)}_{\text{normēšana}}$ - ortogonalizējam otrā bāzes elementa koordinātu kolonnu ar pirmo un normējam;
3. $\underbrace{K_{13}(- < \mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1 >)}_{\text{ortogonalizācija}}, \underbrace{K_{23}(- < \mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2 >)}_{\text{ortogonalizācija}},$

$$\underbrace{K_2\left(\frac{1}{||\mathbf{e}_3 - <\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1>\mathbf{e}_1 - <\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2>\mathbf{e}_2||}\right)}_{\text{normēšana}}$$ - ortogonalizējam trešā bāzes elementa koordinātu kolonnu ar pirmo un otro kolonnu un normējam;

4. ...

1.4.4. Teorēma

1.4. teorēma. (Grama-Šmita ortonormēšanas algoritma pareizība) E - galīgi dimensionāla ET, $\underline{\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}}$. Definēsim

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1^\star \\ \mathbf{g}_2 = \Big(\mathbf{e}_2 - <\mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1>\mathbf{g}_1\Big)^\star \\ \mathbf{g}_3 = \Big(\mathbf{e}_3 - <\mathbf{e}_3|\mathbf{g}_2>\mathbf{g}_2 - <\mathbf{e}_3|\mathbf{g}_1>\mathbf{g}_1\Big)^\star \\ ... \\ \mathbf{g}_l = \Big(\mathbf{e}_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} <\mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i>\mathbf{g}_i\Big)^\star \end{cases}$$

Tad

1. $\langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle$;
2. $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ ir ortonormēta kopa.

PIERĀDĪJUMS

1. $$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1 \rangle, \\ \mathbf{g}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle, \\ ... \\ \mathbf{g}_l \in \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle, \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \quad \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle$$

2. Izmantosim matemātisko indukciju ar bāzi l.

Indukcijas bāze $l = 1$ - izpildās acīmredzami.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}\}$ ir ortonormēta un pierādīsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}, \mathbf{g}_l\}$ ir ortonormēta.

Jāpierāda tikai, ka $< \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j >= 0, \ \forall \ j < l$, visi pārējie nosacījumi seko no indukcijas pieņēmuma.

$\mathbf{g}_l = \left(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i\right)^{\star}$. Apzīmēsim

$$\gamma_l = ||\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i|| \iff \gamma_l\mathbf{g}_l = \mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i.$$

$$\forall\ j < l : < \gamma_l\mathbf{g}_l|\mathbf{g}_j >= \gamma_l < \mathbf{g}_l|\mathbf{g}_j >=$$

$$< \left(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i\right)|\mathbf{g}_j >=$$

$$< \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_j > - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i >< \mathbf{g}_i|\mathbf{g}_j >=$$

$$< \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_j > - < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_j >= 0.\blacksquare$$

1.1. piezīme. Seko, ka jebkuru ET bāzi var pārveidot par ortonormētu bāzi ar Grama-Šmita algoritmu. Seko, ka $\forall$ ET E $\exists$ ortonormēta bāze.

1.2. piezīme. Grama-Šmita algoritmu var modificēt tā, lai normēšana notiktu pēc ortogonalizācijas (lai nepatīkamie saucēji parādītos tikai pašās beigās).

Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms - 2.variants

E - galīgi dimensionāla ET, $\underline{\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}}$. Konstruēsim elementu virkni $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ šādā veidā (kā starprezultātu konstruēsim elementu virkni $\{\mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_l\}$):

1. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_1$;
2. $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2 > \mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_1$;
3. ...

l-1. $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_l - \sum\limits_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$;

l. normēsim elementus $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_l\}$, iegūsim virkni $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$.

2. 8.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Ar kādu a vērtību elementi $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ un $\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ veido ortogonālu kopu?

8.2 Aprakstīt $V^{\perp}$ (uzdot veidotājsistēmu) norādītajās Eiklīda telpās ar standarta skalāro reizinājumu.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $V = \langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$;

(b) $E = \mathbb{R}^3$,$V = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$;

(c) $E = \mathbb{R}^4$, $V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$.

8.3 Dotās bāzes pārveidot par ortonormētām bāzēm attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu izmantojot Grama-Šmita algoritmu (mainīt rindu pierakstu uz kolonnu pierakstu).

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(2,3)\}$.
(b) $E = \mathbb{R}^3$, $\{(1,2,-1),(2,0,1),(3,2,-1)\}$.
(c) $E = \mathbb{R}^4$, $\{(1,1,0,0),(1,1,1,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$.

8.4 Atrast elementu koordinātes attiecībā uz iepriekšējā uzdevumā atrastajām ortonormētajām bāzēm.

(a) $\begin{bmatrix} 5 \\ \hline 6 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \end{bmatrix}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.5 Aprakstīt tādu skalāru reizinājumu telpā $\mathcal{M}at(n,\mathbb{R})$, lai standarta bāze $\{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{nn}\}$ būtu ortonormēta.