DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt bilineāro formu un reālā skalārā reizinājuma teorijas pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- telpā $\mathbb{R}^n$ var definēt lietderīgu operāciju - *skalāro reizinājumu*;
- lineārajās telpās var apskatīt divu argumentu operācijas, kas vispārina klasisko skalāro reizinājumu.

Svarīgākie jēdzieni: standarta skalārais reizinājums, vektora norma, normēts vektors, ortogonāli vektori, bilineāra forma, simetriska forma, bilineāras formas matrica, skalārais reizinājums, Eiklīda telpa, ortogonāli elementi, Eiklīda norma, attālums Eiklīda telpā.

Svarīgākie fakti un metodes: standarta skalārā reizinājuma pamatīpašības, bilineāra forma ir noteikta ar tās darbību uz bāzes elementiem, Eiklīda normas īpašības.

1. Standarta skalārais reizinājums

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas

Kolonnu aina

$L = \mathbb{R}^n$. Uzskatīsim L elementus par kolonnu matricām. Definēsim *(standarta, kanonisko) skalāro reizinājumu:*

$$\rho : L \times L \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{w}.$$

Šeit 1×1 matrica tiek identificēta ar skaitli.

Koordinātu terminos:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \hline ... \\ \hline v_n \end{array}\right] \\ \mathbf{w} = \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \hline ... \\ \hline w_n \end{array}\right] \end{array}\right. \implies \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_1 + ... + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Parasti apzīmēsim $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ar $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$.

1.1. piemērs. $\mathbf{v} = [2, 3, 4]^T$, $\mathbf{w} = [2, -3, 0]^T$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = -5$.

Rindu aina

Uzskatot $\mathbb{R}^n$ elementus par rindām, skalārais reizinājums tiek definēts savādāk:

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w}^T .$$

Tā kā mēs bieži izmantojam koordinātu pierakstu, sākot no šīs vietas parasti uzskatīsim $\mathbb{R}^n$ elementus par kolonnām.

Vektora garums

vektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ garums $||\mathbf{x}||$:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Redzam, ka garums sakrīt ar parasto ğeometrisko garumu, ja $n \in \{1, 2, 3\}$.

Vektoru $\mathbf{x}$ sauc par *normētu*, ja $||\mathbf{x}|| = 1$.

Par attālumu starp vektoriem $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ sauksim $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

Ortogonalitāte

Vektorus $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ sauc par *ortogonāliem*, ja $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$.

1.1.2. Pamatīpašības

Simetrija

1.1. teorēma. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

PIERĀDĪJUMS $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T\mathbf{x} = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$. ■

Linearitāte

1.2. teorēma. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})$.
2. $(c \cdot \mathbf{x}|\mathbf{y}) = c(\mathbf{x}|\mathbf{y})$.

PIERĀDĪJUMS
1. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})^T\mathbf{z} = (\mathbf{x}^T+\mathbf{y}^T)\mathbf{z} = \mathbf{x}^T\mathbf{z}+\mathbf{y}^T\mathbf{z} = (\mathbf{x}|\mathbf{z})+(\mathbf{y}|\mathbf{z})$.

2. $(c \cdot \mathbf{x}|\mathbf{y}) = (c \cdot \mathbf{x})^T\mathbf{y} = c\mathbf{x}^T\mathbf{y} = c(\mathbf{x}|\mathbf{y})$. ■

Nedeğenerētība

1.3. teorēma. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

1. $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$.
2. $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

PIERĀDĪJUMS
1. $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq 0$.

2. $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = ... = x_n = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

Ģeometriskā interpretācija $\mathbb{R}^3$

1.4. teorēma. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

1. $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot \cos\varphi$, kur $\varphi \in [0, \pi]$ ir lenķis starp vektoriem $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$.
2. $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$.

3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

PIERĀDĪJUMS

1. Apskatīsim trijstūri ar malām $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ un $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ (nobīdīts). Saskaņā ar kosinusu teorēmu:

$$||\mathbf{y}-\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}|| - 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot \cos\varphi.$$

Atšifrējot koordinātēs iegūsim:
$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 =$
$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot \cos\varphi.$ $\Longrightarrow$

$$\underbrace{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}_{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot \cos\varphi.$$

2. $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cdot \cos\varphi \le ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. jo $\cos\varphi \le 1$.

3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \le ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||) = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2.$

■

1.1. piezīme. Redzam, ka leņķis starp vektoriem $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ ir $\frac{\pi}{2}$, ja $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, t.i. tie ir ortogonāli.

1.2. Pielietojumi

Ģeometrija

- vektora (nogriežņa) garuma aprēķināšana;
- vektoru (nogriežņu) ortogonalitātes noteikšana;
- vektoru (nogriežņu) paralelitātes noteikšana;
- leņķa atrašana starp vektoriem.

2. Bilineārās formas

2.1. Vispārīgas bilineāras formas

2.1.1. Definīcijas

Bilineāra forma ir funkcija $f : L \times L \longrightarrow k$, kas $\forall\ \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\} \subset L$ apmierina šādas īpašības:

- $f(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ (linearitāte pēc pirmā argumenta)
- $f(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \mu f(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ (linearitāte pēc otrā argumenta).

Visu L bilineāru formu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{B}il(L)$.

Bilineāru formu f sauc par:

- simetrisku, ja $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
- antisimetrisku, ja $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

2.1. piemērs. Nulles bilineārā forma $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$.

Standarta skalārais reizinājums. $f(p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$.

2.1.2. Bilineāro formu pamatīpašības

2.1. teorēma. Bilineārā forma ir viennozīmīgi definēta ar tās darbību uz jebkuras bāzes elementu pāriem.

PIERĀDĪJUMS L - k-lineāra telpa, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $f \in \mathcal{B}il(L)$.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j\Big) =$$

$$= \sum_{i,j} v_i w_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \blacksquare$$

Matricu $\mathbf{F} = [f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]_{n,n}$ sauc par *bilineārās formas f matricu* *(attiecībā uz doto bāzi).*

2.1. piezīme. No teorēmas pierādījuma seko bilineārās formas vērtības aprēķināšanas formula, ja ir zināma matrica un elementu koordinātes:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{w},$$

kur $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ nozīmē gan elementus, gan to koordinātu kolonnas.

2.2. piemērs. Standarta skalārajam reizinājumam $\mathbf{F} = \mathbf{E}$.

3. Vispārīgais reālais skalārais reizinājums

3.1. Ievads

3.1.1. Definīcija

E - $\mathbb{R}$-lineāra telpa. Telpā E ir dota *skalāra reizinājuma funkcija*

$$f : L \times L \to \mathbb{R},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto < \mathbf{v}|\mathbf{w} >,$$

ja tā apmierina šādas īpašības:

- $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) =< \mathbf{v}|\mathbf{w} >$ ir bilineāra simetriska forma,
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > \geq 0$ (normas nenegativitāte);
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} >= 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (normas nedeğenerētība).

$\mathbb{R}$-LT E ar tajā uzdotu skalāro reizinājumu sauc par *Eiklīda telpu (ET)*.

Saskaņā ar iepriekšējo sadaļu koordinātu pierakstā skalārais reizinājums izsakās ar šādu formulu

$$< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{w},$$

kur $\mathbf{F}$ ir $\dim(E) \times \dim(E)$ matrica.

Elementus $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par ortogonāliem, ja $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0$.

3.1.2. Klasiskie piemēri

Standarta skalārais reizinājums

Matrica - $\mathbf{E}$.

3.1. piemērs. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline -3 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = -5$.

Funkciju skalārais reizinājums

$E = \mathcal{C}[a,b]$ - nepārtrauktas funkcijas, $< f|g >= \int\limits_a^b f(t)g(t)dt.$

Polinomu punktveida skalārais reizinājums

$E = \mathbb{R}[X]_n$, $< f|g >= \sum\limits_{i=1}^{n+1} f(x_i)g(x_i)$, kur $x_1, ..., x_{n+1}$ - dažādi reāli skaitļi.

3.1.3. Normas īpašības

Par $\mathbf{v} \in E$ *Eiklīda normu* $||\mathbf{v}||$ sauc $\sqrt{< \mathbf{v}|\mathbf{v} >}$.

3.2. piemērs. $E = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, $f = \sin x$,

$|f| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt} = \sqrt{\pi}.$

Attālumu starp $\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in E$ definē kā $d(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$.

3.1. teorēma. E - Eiklīda telpa.

1. $||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda|\cdot||\mathbf{v}||$.
2. $|<\mathbf{v}|\mathbf{w}>|\le||\mathbf{v}||\cdot||\mathbf{w}||$ (Koši-Švarca nevienādība).
3. $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||\le||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||$(trijstūra nevienādība).

PIERĀDĪJUMS
1. $||\lambda\mathbf{v}||^2 =<\lambda\mathbf{v}|\lambda\mathbf{v}>=\lambda^2<\mathbf{v}|\mathbf{v}>$.

2. $t\in\mathbb{R}$. Apskatīsim $||\mathbf{v}-t\mathbf{w}||^2$:
$||\mathbf{v}-t\mathbf{w}||^2 =<\mathbf{v}-t\mathbf{w}|\mathbf{v}-t\mathbf{w}>=$
$<\mathbf{v}|\mathbf{v}>-2<\mathbf{v}|\mathbf{w}>t-<\mathbf{w}|\mathbf{w}>=$
$||\mathbf{v}||^2-2<\mathbf{v}|\mathbf{w}>t+||\mathbf{w}||^2t^2\ge 0 \Longrightarrow$ diskriminants - nepozitīvs
$\Longrightarrow\ <\mathbf{v}|\mathbf{w}>^2-||\mathbf{v}||^2\cdot||\mathbf{w}||^2\le 0 \Longrightarrow\ |<\mathbf{v}|\mathbf{w}>|\le||\mathbf{v}||\cdot||\mathbf{w}||$.

3. $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 =<\mathbf{v}+\mathbf{w}|\mathbf{v}+\mathbf{w}>=$

$$
\begin{aligned}
&< \mathbf{v}|\mathbf{v} > + \underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} > + < \mathbf{w}|\mathbf{v} >}_{=2<\mathbf{v}|\mathbf{w}>} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >= \\
&=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}_{|<\mathbf{v}|\mathbf{w}>|} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >\leq \\
&=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{| < \mathbf{v}|\mathbf{w} > |}_{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >\leq \\
&= ||\mathbf{v}||^2 + 2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| + ||\mathbf{w}||^2 = (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||)^2. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

3.1. piezīme. Seko, ka

$$-1 \leq \frac{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} \leq 1, \text{ ja } \mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Definēsim $\cos\varphi = \dfrac{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$. φ var interpretēt kā "leņķi" starp **v** un **w**.

4. 7.mājasdarbs

4.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Atrast doto vektoru skalāro reizinājumu:

(a) $\left[\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}\right]$, $\left[\dfrac{4}{\dfrac{3}{2}}\right]$;

$$\left[\begin{array}{c}1\\\hline 2\\\hline 3\end{array}\right],\ \left[\begin{array}{c}4\\\hline 3\\\hline 2\end{array}\right];$$

(b) $[1|2|1|2|1|2]^T$, $[3|-1|2|-4|2|0]$.

7.2 Atrast leņķi starp vektoriem:

(a) $\left[\begin{array}{c}2\\\hline 3\end{array}\right]$ un $\left[\begin{array}{c}-6\\\hline 4\end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c}1\\\hline 2\end{array}\right]$ un $\left[\begin{array}{c}2\\\hline 0\end{array}\right]$;

(c) $\left[\begin{array}{c}1\\\hline 1\\\hline 1\end{array}\right]$ un $\left[\begin{array}{c}2\\\hline -1\\\hline 2\end{array}\right]$.

7.3 (a) Atrast 2 normētus vektorus telpa $\mathbb{R}^2$, kas ir ortogonāli vektoram $\begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$.

(b) Atrast 2 normētus vektorus telpa $\mathbb{R}^3$, kas ir ortogonāli vektoriem $\begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$ un $\begin{bmatrix} 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$.

7.4 Atrast funkciju skalāro reizinājumu, ja skalārais reizinājums ir šāds: $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

(a) $\langle \sin(3x) \Big| \sin(2x)\rangle$;

(b) $\langle \sin(x) \Big| \cos(x)\rangle$;

(c) $\langle \sin(mx) \Big| \sin(mx)\rangle$, $m \in \mathbb{N}$.

7.5 Atrast telpā $\mathbb{R}[X]_2$ polinomu punktveida skalāro reizinājumu, ja tas ir definēts šādi: $\langle f \Big| g\rangle = \sum\limits_{i=1}^{3} f(x_i)g(x_i)$, kur $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

(a) $\langle X^2 \big| 2X - 3\rangle$;

(b) $\langle X^2 - 1 \big| X^2 + X + 1\rangle$;

(c) $\langle a_2X^2 + a_1X + a_0 \big| b_2X^2 + b_1X + b_0\rangle$, $m \in \mathbb{N}$.