DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt īpašvērtību un īpašvektoru īpašības un lietojumus.

Lekcijas kopsavilkums:

- zinot matricas elementus var aptuveni noteikt īpašvērtību atrašanās vietu,

- matricu diagonalizāciju var izmantot diskrēto dinamisko sistēmu pētīšanā.

Svarīgākie jēdzieni:

Svarīgākie fakti un metodes: Geršgorina teorēma, Perrona teorēma,

1. Īpašvērtību lokalizācija

1.1. Geršgorina teorēma

1.1. teorēma. $\mathbf{M} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$ definēsim $r_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Tad

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M})\ \exists\ i :\ \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].$$

(katra reāla īpašvērtība atrodas kādā no intervāliem ar centru a_{ii} un garumu $2r_i$)

PIERĀDĪJUMS

$$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}) \iff \exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} :\ \mathbf{Mc} = \lambda \mathbf{c} \iff$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādu i, ka $|c_i| = \max_j |c_j| > 0$. Apskatīsim i-to vienādojumu:

$$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}c_j \Longleftrightarrow \lambda - a_{ii} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\left(\frac{c_j}{c_i}\right) \Longrightarrow$$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i} \right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} \cdot \frac{c_j}{c_i} \right| =$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \underbrace{\left|\frac{c_j}{c_i}\right|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i \Longrightarrow \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].\blacksquare$$

1.1. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ reālās īpašvērtības atrodas intervālā $[0, 4]$.

1.2. Perrona teorēma

1.2. teorēma. $\mathbf{P} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j:\ a_{ij} > 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{P})$ (*Perrona īpašvērtība*):

1. $\lambda > 0$;
2. $\exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline \ldots \\ \hline c_n \end{bmatrix} \in \mathbf{P}^\lambda$: $\forall\ i\ c_i > 0$;
3. $\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\mathbf{P})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.
4. $\mathbf{v}$ **-** pozitīvs $\mathbf{P}$ īpašvektors $\implies$ $\mathbf{v}$ atbilst īpašvērtībai λ.

PIERĀDĪJUMS Netiek dots.■

1.2. piemērs. $\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$,

$\mathcal{S}pec(\mathbf{P}) = \{-1.6824, 0.2859, 10.3965\}$.

2. Īpašvērtību un īpašvektoru lietojumi

2.1. Diskrētas sistēmas matemātiskajā medicīnā

Apskatīsim vienkāršu vēža audzēja modeli:

- vēža audzēja lielumu laika momentā n nosaka tā šūnu skaits (svars) u_n.
- pieņemsim, ka vēža audzēja dinamiku nosaka kāda ķīmiska viela P, ko izdala pats audzējs, P daudzums laika momentā n ir v_n.

Pieņemsim, ka vēža audzēja šūnu skaits un P daudzums apmierina *diskrētu dinamisku sistēmu*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n. \end{cases}$$

Pamatojums:

- uzskatām, ka ja nav vielas P klātbūtnes, tad audzējs laika vienībā palieinās 2 reizes;

- viela P iznīcina audzēja šūnas, tāpēc $-v_n$ pirmajā vienādojumā, tas tiek iegūts mainot P nosacītās vienības;
- audzējs izdala vielu P, pieņemsim, ka vidēji viena audzēja svara vienība izdala $3/4$ vienības P.

Apzīmēsim $\left[\begin{array}{c} u_n \\ \hline v_n \end{array}\right]$ ar $\mathbf{x}_n$, iegūsim matricu vienādību

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_n, \text{ kur } \mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 3/4 & 0 \end{array}\right]$$

Ja ir zināma sākotnējā $\mathbf{x}$ vērtība $\mathbf{x}_0$, tad pēc n laika vienībām sistēmas stāvoklis būs

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^n \mathbf{x}_0.$$

Pagaidām tiek izmantota kanoniskā bāze $\left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] \right\}$. Atradīsim labāku bāzi - diagonalizēsim $\mathbf{M}$.

$\mathbf{M}$ ir īpašvērtības $\{3/2, 1/2\}$ ar īpašvektoriem $\{ \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 2/3 \\ \hline 1 \end{array}\right] \}$

Attiecībā uz jauno bāzi matrica ir $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c} 3/2 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 \end{array}\right]$,

kur $\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 2/3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{S}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 3/4 & -1/2 \\ \hline -3/4 & 3/2 \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \Longrightarrow$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{M}^n \mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^m \mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})...(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{x}_0 =$$

$$\mathbf{S}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{S}\left[\begin{array}{c|c} (\frac{3}{2})^n & 0 \\ \hline 0 & (\frac{1}{2})^n \end{array}\right]\mathbf{S}^{-1} =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{n+1} - \frac{1}{2}^{n+1} & -\frac{3}{2}^{n} + \frac{1}{2}^{n} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^n - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n \end{array}\right]\mathbf{x}_0 =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{n+1} - \frac{1}{2}^{n+1} & -\frac{3}{2}^{n} + \frac{1}{2}^{n} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^n - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline v_0 \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{n+1} & -\frac{3}{2}^{n} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^n & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline v_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}^{n+1}u_0 - \frac{3}{2}^{n}v_0 \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^n u_0 - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^n v_0 \end{array}\right] =$$

$$(\tfrac{3}{2})^n\left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}u_0 - v_0 \\ \hline \frac{3}{4}u_0 - \frac{1}{2}v_0 \end{array}\right].$$

Tālāk ir jāveic analīze. Redzams, ka audzējs aug, ja sākuma nosacījumi ir bioloģiski relevanti.

Pieņemsim, ka var panākt, lai vielas P izdalīšanās notiek intensīvāk. To var panākt ar terapeitiskām metodēm, piemēram, palielinot audzēja šūnu membrānu caurlaidību. Pieņemsim, ka šajā gadījumā iegūsim sistēmu ar matricu $\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right]$.

Matricai $\mathbf{M}$ nav reālu īpašvērtību, tai ir kompleksas īpašvērtības $\{1-i, 1+i\}$ ar īpašvektoriem

$$\left\{\left[\begin{array}{c} 1/2+i/2 \\ \hline 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1/2-i/2 \\ \hline 1 \end{array}\right]\right\}.$$

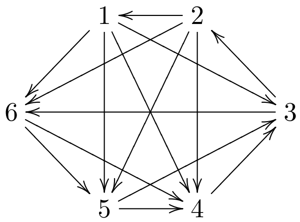
Var pierādīt, ka šajā gadījumā audzēja lielums pozitīvajā apgabalā svārstās, nevis aug.

2.2. Reitingu zinātne

Dažādās sitācijās rodas nepieciešamība sakārtot pētāmās sistēmas vienības atkarībā no to īpašībām, piemēram:

- komandas sporta sacensībās,
- cilvēkus pēc to īpašībām,
- interneta lapas pēc to popularitātes.

2.1. piemērs. 6 komandas spēlē visas spēles savā starpā, neizšķirtu spēļu nav. Attēlosim turnīra rezultātus ar grafu, šķautne $a \to b$ nozīmē, ka a zaudēja b:



Grafam piekārtosim matricu $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kā salīdzināt savā starpā komandas $\{1, 2\}$ un $\{3, 5, 6\}$? Tām ir vienāds vinnēto un zaudēto spēlu skaits.

Mēģināsim definēt komandu reitingu sarakstu $r_1, ..., r_6$ tā, lai būtu apmierināti šādi nosacījumi:

- komanda i ir "stiprāka" nekā komanda $j \iff r_i > r_j$;
- katra uzvara dod ieguldījumu reitingā, kas ir proporcionāls uzvarētās komandas reitingam (jo stiprāka komanda ir uzvarēta, jo lielāku ietekmi šī uzvara ir atstājusi uz vinnējušās komandas reitingu).

Attiecībā uz r_i iegūsim LVS:

$$\begin{cases} r_1 = c\sum\limits_{j=1}^{6} a_{1j} r_j \\ ... \\ r_6 = c\sum\limits_{j=1}^{6} a_{6j} r_j \end{cases}$$

To var pārveidot ekvivalentā matricu vienādojumā

$$\mathbf{r} = c\mathbf{M}\mathbf{r} \iff \mathbf{M}\mathbf{r} = \left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{r}, \text{ kur } \mathbf{r} = \left[\frac{r_1}{\frac{...}{r_6}}\right].$$

Redzam, ka ir jāatrod $\mathbf{M}$ īpašvērtības un īpašvektori.

Šajā gadījumā

- $R_{\mathbf{M}}(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda - 1$,
- ir tikai viena pozitīva īpašvērtība $\dfrac{1}{c} \approx 2.07$,

- atbilstošais īpašvektors - reitingu saraksts, normējot summu uz 100, ir $(5, 11, 23, 25, 17, 16)$.

2.2. piemērs. Apskatīsim visu interneta HTML lapu kopu S. Definēsim šķautni $a \to b$, ja a atsaucas uz b (satur hiperlinku uz b). Kā sakārtot visas lapas atkarībā no to ietekmības? Līdzīgi kā iepriekšējā piemērā iegūsim matricas īpašvektoru atrašanas uzdevumu. Pamatojumā ir jāizmanto Perrona teorēmas tipa rezultāti.

Google meklēšanas programma izmanto šādus reitingus, lai šķirotu atrasto lapu sarakstu, pirmajā lappusē parādās lapas ar visaugstāko reitingu (PageRank algoritms).

Matricas ir milzīgas - $10^9 \times 10^9$, īpašvektori tiek meklēti ar tuvinātām, iteratīvām metodēm.

3. 6.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

6.1 (*Geršgorina teorēma*)

Vai matricas $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 9 & 1 \\ \hline 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(3, \mathbb{R})$ īpašvērtība λ var apmierināt nosacījumu $4 \leq \lambda \leq 5$?

6.2 (*Perrona teorēma*) Atrast **tuvināti** matricu Perrona īpašvērtības un īpašvektorus (normētus tā, lai koordinātu summa ir 100).

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

6.3 (*Diagonalizācijas lietošana*) Atrisināt diskrēto dinamisko sistēmu

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}$$

ar sākuma nosacījumu $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1. \end{cases}$