DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt īpašvērtību un īpašvektoru īpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- matricas raksturīgais polinoms un, sekojoši, īpašvērtības nav atkarīgi no bāzes,
- īpasvektori ar dažādām īpašvērtībām ir lineāri neatkarīgi,
- ja matricas apmierina noteiktus nosacījumus, tad var atrast bāzes, attiecībā uz kurām tās satur daudz nuļļu - tās ir diagonālajā formā.

Svarīgākie jēdzieni: līdzīgas matricas, diagonalizējama matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: raksturīgā polinoma invariance, raksturīgā polinoma koeficientu īpašības, īpašvērtību īpašības, diagonalizējamības kritēriji.

1. Īpašvērtību un īpašvektoru īpašības

1.1. Īpašvektoru un raksturīgā polinoma īpašības

1.1. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. f matricu raksturīgie polinomi nav atkarīgi no bāzes (raksturīgais polinoms ir LO *invariants*).

PIERĀDĪJUMS

Pārejot uz citu bāzi ar pārejas matricu $\mathbf{S}$ f matrica mainās saskaņā ar formulu

$\mathbf{F}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} \Longrightarrow$

$$R_{\mathbf{F}'}(\lambda) = \det(\mathbf{F}' - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} - \lambda\mathbf{E}) =$$

$$\det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}(\lambda\mathbf{E})\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{S}\right) =$$

$$= \det\left(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{S} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{S})\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{S}\right) =$$

$$\det(\mathbf{S}^{-1})\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1})\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) =$$

$$\det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S})\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}) = \underbrace{\det(\mathbf{E})}_{=1}\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}) =$$

$$\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}) = R_{\mathbf{F}}(\lambda). \blacksquare$$

1.2. teorēma. $\mathbf{M} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

1. $R_{\mathbf{M}}(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{zemākas } \lambda \text{ pakāpes}}.$
2. $R_{\mathbf{M}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar $\det \mathbf{M}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Izvirzīsim $\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{array}\right]$ pēc pirmās rindas interesējoties tikai par koeficientiem pie λ^n un λ^{n-1}:

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{array}\right] =$$

$$(a_{11}-\lambda)\det(\mathbf{M}_{11}) + a_{12}(-1)^3\det(\mathbf{M}_{12}) + \ldots$$

Šajā izvirzījumā tikai pirmais loceklis var saturēt tādus monomus, jo $\det(\mathbf{M}_{1j}), j > 1$, ir polinoms, kura λ pakāpe nepārsniedz $n-2$ (izsvīrotās pirmā rinda un j-tā kolonna satur $(a_{11}-\lambda)$ un $(a_{jj}-\lambda)$.

Turpinam šo procesu ar mazākām matricām. Ievērosim, ka

$$\mathbf{M}_{11} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{array}\right]$$

Izvirzot $\det \mathbf{M}_{11}$ pēc pirmās rindas, ievērosim, ka jāatstāj tikai pirmais loceklis, kas dos reizinātāju $(a_{22}-\lambda)$.

Beidzot šo procesu iegūst, ka koeficienti pie monomiem λ^n un λ^{n-1} ir tādi paši kā polinomam $(a_{11}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda)$.

2. $\forall\ f(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0 \in k[X]$ brīvais loceklis ir vienāds ar $f(0) \implies R_{\mathbf{M}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar $R_{\mathbf{M}}(0) = \det \mathbf{M}$. ■

Dažiem raksturīgā polinoma koeficientiem ir doti vārdi. Dota matrica $\mathbf{M} = [a_{ij}]_{n,n}$. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ sauc par $\mathbf{M}$ *treisu (trace, Spur)* - $tr(\mathbf{M})$.

1.1. piezīme. No teorēmas seko, ka visi raksturīga polinoma koeficienti (piemēram, treiss un determinants) ir invarianti (nav atkarīgi no bāzes): $tr(\mathbf{M}) = tr(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS})$.

1.3. teorēma. $\mathbf{M} \in \mathcal{M}at(n, k)$.
$\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subseteq \mathcal{S}pec(\mathbf{M})$, λ_i - dažādi, $\forall\ i\ :\ \mathbf{l}_i \in L^{\lambda_i}$. Tad $\underline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m\}}$.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums no pretējā. Pieņemsim, ka t ir minimālā indeksa vērtība ar īpašību $\overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_t\}} \Longrightarrow \mathbf{l}_t = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i \mathbf{l}_i$.

$$\Longrightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{l}_t = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (\mathbf{M} \cdot \mathbf{l}_i) \Longrightarrow \lambda_t \mathbf{l}_t = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{l}_i.$$

$\lambda_t = 0 \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{t-1}\}}$ - pretruna ar pieņēmumu par minimalitāti.

$$\lambda_t \neq 0 \implies \begin{cases} \mathbf{l}_t = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i \mathbf{l}_i \\ \mathbf{l}_t = \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \frac{\lambda_i}{\lambda_t}) \mathbf{l}_i \end{cases} \implies \text{atņemot vienu vienādību}$$

no otras iegūsim

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_t}\right)}_{\neq 0} \mathbf{l}_i \implies \exists \text{ netriviāla lineāra kombinācija, kas}$$

saista $\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{t-1}\} \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{t-1}\}}$ - pretruna ar pieņēmumu par minimalitāti. ■

1.4. teorēma. $\mathbf{M} \in \mathcal{M}at(n, k)$.

1. $\mathbf{M}$ ir neinvertējama $\iff 0 \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M})$.
2. $\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}) \implies c\lambda \in \mathcal{S}pec(c\mathbf{M})$.
3. $\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}),\ n \in \mathbb{N} \implies \lambda^n \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M})$.

4. $\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}$ ir invertējama $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{\lambda} \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}^{-1})$.

5. $\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}) \Longrightarrow \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{M}^T)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{M} = \left[\ \mathbf{k}_n \mid ... \mid \mathbf{k}_n\ \right]$ ir neinvertējama $\Longleftrightarrow$ $r(\mathbf{M}) < n$ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{k}_i = \mathbf{0} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{c} = 0\cdot\mathbf{c}$ - tātad 0 ir $\mathbf{M}$ īpašvērtība, ar īpašvektoru

$$\mathbf{c} = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{array}\right].$$

2. $\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{x} \Longrightarrow c\mathbf{Mx} = c\lambda\mathbf{x} = (c\lambda)$.

3. $\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{M}^n\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}^{n-1}\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{M}^{n-2}\mathbf{x} = ... = \lambda^n\mathbf{x}$.

4. $\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Mx} = \lambda\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} = (\frac{1}{\lambda})\mathbf{x}$.

5. Matricām $\mathbf{M}$ un $\mathbf{M}^T$ ir vienādi raksturīgie polinomi -
$R_{\mathbf{M}^T}(\lambda) = \det(\mathbf{M}^T - \lambda\mathbf{E}) = \det\left((\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})^T\right) = R_{\mathbf{M}}(\lambda)$. ■

1.2. Diagonalizācija

Matricu algebrā īpašu lomu spēlē diagonālas matricas, jo tās ir viegli reizināt.

Tāpēc ir svarīgi prast atrast bāzes, attiecībā uz kurām matrica ir diagonālā formā.

Matricu $\mathbf{M} \in \mathcal{M}at(n,k)$ sauc par *diagonalizējamu*, ja $\exists$ invertējama matrica $\mathbf{S} \in \mathcal{M}at(n,k)$ tāda, ka $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}$ ir diagonāla matrica. Šādā gadījumā saka, ka $\mathbf{S}$ *diagonalizē* $\mathbf{M}$.

Pāreju $\mathbf{M} \dashrightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}$ var uzskatīt par bāzes maiņas efektu uz $\mathbf{M}$. Tādējādi matrica ir diagonalizējama, ja $\exists$ bāze, attiecībā uz kuru tā ir diagonāla:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}\\ \text{matrica } \mathbf{M}\end{array}\right. \dashrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,...,\mathbf{e}'_n\}\\ \text{matrica } \mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}\end{array}\right.$$

Matricas $\mathbf{M}$ un $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}$ sauc par *līdzīgām matricām.*

1.1. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c}1 & -1\\ \hline 0 & 1\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}a & -a\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}1 & 1\\ \hline 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}a & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right].$

1.5. teorēma.

1. $\mathbf{M}\in\mathcal{M}at(n,k)$ ir diagonalizējama $\iff$ $\exists\, n$ lineāri neatkarīgi $\mathbf{M}$ īpašvektori.
2. $\mathbf{S}$ diagonalizē $\mathbf{M}$: $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}=\mathbf{D}$ - diagonāla $\Longrightarrow$ $\mathbf{S}$ kolonnas ir $\mathbf{M}$ īpašvektoru koordinātu kolonnas.

PIERĀDĪJUMS

1. $\underline{\Longrightarrow}$

$\mathbf{M}\in\mathcal{M}at(n,k)$ ir diagonalizējama $\Longrightarrow$ $\exists$ bāze $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,...,\mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kuru matrica $\mathbf{M}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{MS}$ ir diagonāla:

$$\mathbf{M}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & 0...0 & 0 \\ \hline ... & ... & 0 \\ \hline 0 & 0...0 & \lambda_n \end{array}\right]$$

$\mathbf{M}'$ kolonnas ir jaunās bāzes $\mathcal{B}'$ elementu attēli reizinot tos ar $\mathbf{M}'$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{M}'\mathbf{e}'_i = \lambda_i \mathbf{e}'_i$ un $\mathbf{M}'$ kolonnas ir lineāri neatkarīgas $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}'$ elementi ir n lineāri neatkarīgi $\mathbf{M}'$ īpašvektori.

Bet $\mathbf{M}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{S}\mathbf{M}'\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{x}$ $\Longrightarrow$

$\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{e}'_i = \lambda_i \mathbf{S}\mathbf{e}'_i$ - elementi $\mathbf{S}\mathbf{e}'_i$ ir matricas $\mathbf{M}$ īpašvektori.

Jāpierāda, ka $\mathbf{S}\mathbf{e}'_i$ ir lineāri neatkarīgi.

Pieņemsim pretējo, $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija, vienāda ar nulles elementu:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\mathbf{S}\mathbf{e}'_i) = \mathbf{0}.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{S}^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\mathbf{S}\mathbf{e}'_i) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\Longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{0}$ - elementi $\mathbf{e}'_i$ ir lineāri atkarīgi - pretruna.

$\Longleftarrow$

$\exists\ n$ lineāri neatkarīgi $\mathbf{M}$ īpašvektori $\{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ar īpašvērtībam $\lambda_i \implies \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ir bāze un attiecībā uz to jaunā matrica $\mathbf{M}'$ ir diagonāla.

2. $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{D} \implies \mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}$.

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [\mathbf{k}_1|...|\mathbf{k}_n] \\ \mathbf{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{E}_{ii} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{S} = [\mathbf{M}\mathbf{k}_1|...|\mathbf{M}\mathbf{k}_n] \\ \mathbf{S}\mathbf{D} = [\lambda_1\mathbf{k}_1|...|\lambda_n\mathbf{k}_n] \end{cases} \qquad \blacksquare$$

1.6. teorēma. $n \times n$ matrica ir diagonalizējama, ja

1. tai $\exists\ n$ dažādas īpašvērtības,
2. tā ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem uz galvenās diagonāles.

PIERĀDĪJUMS

1. Matricai $\exists\ n$ dažādas īpašvērtības $\implies$ tai ir n lineāri neatkarīgi īpašvektori. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu tā ir diagonalizējama.

2. Matrica $\mathbf{M}$ ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem $a_{11},...,a_{nn}$ uz diagonāles $\Longrightarrow$ $\forall\, i$ matricai $\mathbf{M}-a_{ii}\mathbf{E}$ uz diagonāles ir vismaz viena nulle $\Longrightarrow$ $\det(\mathbf{M}-a_{ii}\mathbf{E})=0$ $\Longrightarrow$

$a_{ii}\in \mathcal{S}pec(\mathbf{M})$ $\Longrightarrow$ matricai $\mathbf{M}$ $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības. ■

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Vai funkcija $\varphi : \mathcal{M}at(n,k) \longrightarrow k[\lambda]$:

$$\varphi(\mathbf{M}) = R_{\mathbf{M}}(\lambda),$$

ir lineārs attēlojums?

5.2 Noteikt vai dotās matricas ir diagonalizējamas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 22 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right]$.

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$.

5.3 (*Diagonalizācija*) Diagonalizēt matricas:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 7 & -5 \\ \hline 10 & -8 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 7 & -4 & 4 \\ \hline 5 & -1 & 5 \\ \hline -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$ (Norādījums: viena no raksturīgā polinoma saknēm ir -1).