DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro izomorfismu un lineāro attēlojumu struktūras pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- dimensija ir vienīgais LT invariants,
- var definēt LT elementus - *īpašvektorus*, kurus LA pārveido vienkāršā veidā.

Svarīgākie jēdzieni: lineārs izomorfisms (LI), izomorfas LT, LO invarianta apakštelpa, LO īpašvektors, LO īpašvērtība, LO un matricas raksturīgais polinoms.

Svarīgākie fakti un metodes: LI īpašības, LT izomorfisms ar k^n, LT klasifikācija ar precizitāti līdz izomorfismam, invariantu apakštelpu īpašības, teorēma par īpašvērtību ekvivalentajām definīcijām, īpašvērtību un īpašvektoru atrašanas algoritmi.

1. Lineāri izomorfismi

Vienkāršākos matemātikas objektus - kopas, raksturo **elementu skaits**. Bijektīvās (savstarpēji viennozīmīgās) funkcijas saglabā elementu skaitu, ko var uzskatīt par svarīgu kopas raksturojošo lielumu - *invariantu.*

Šajā lekcijā noteiksim, kādi invarianti piemīt lineārām telpām. Citiem vārdiem sakot, noteiksim, kādus lielumus saglabā bijektīvi lineāri attēlojumi.

1.1. Pamatfakti

Bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI).*

Ja $\exists$ LI $f : L \to V$, tad saka, ka L un V ir *izomorfas* LT ($L \simeq V$).

1.1. piemērs. id, vektoru simetrija un rotācija.

1.1. teorēma.

1. $\begin{cases} f \in Hom(L,V) \text{ - LI} \\ g \in Hom(V,Z) \text{ - LI} \end{cases} \Longrightarrow g \circ f \in Hom(L,Z)$ ir LI.
2. $f \in Hom(L,V)$ - LI $\Longleftrightarrow$ $f^{-1} \in Hom(V,L)$- LI.
3. L un V - galīgi ģenerētas LT. f - LI $\Longleftrightarrow$ f matricas attiecībā uz $\forall$ bāzēm ir abpusēji invertējamas.
4. L un V - galīgi ģenerētas LT. f - LI ar matricu $\mathbf{F}$ $\Longrightarrow$ f^{-1} matrica ir $\mathbf{F}^{-1}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Agrāk tika pierādīts, ka $g \circ f$ ir LA. Bijektīvu funkciju kompozīcija ir bijektīva funkcija $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ir LI.

2. $f : L \to V$ ir bijektīva funkcija $\Longrightarrow$ $f^{-1} : V \to L$ ir bijektīva funkcija. Jāpierāda, ka f^{-1} ir LA.

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V\ \exists\ \mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L : \begin{cases} f(\mathbf{l}) = \mathbf{v}, f^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{l} \\ f(\mathbf{l}') = \mathbf{v}', f^{-1}(\mathbf{v}') = \mathbf{l}'. \end{cases}$$

$$f^{-1}(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}) = f^{-1}(f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}'))) = f^{-1}(f(\mathbf{l}+\mathbf{l}')) = (f^{-1}\circ f)(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \mathrm{id}(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \mathbf{l}+\mathbf{l}' = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}).$$

$$f^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = f^{-1}(\lambda f(\mathbf{l})) = f^{-1}(f(\lambda\mathbf{l})) = \lambda\mathbf{l} = \lambda f^{-1}(\mathbf{v}).$$

3. f ir LI $\Longleftrightarrow$ f^{-1} ir LI.

Pieņemsim, ka $\dim L = n$ un $\dim V = m$. Fiksēsim bāzes telpā L un V, attiecībā uz tām f un f^{-1} matricas apzīmēsim ar $\mathbf{F}$ un $\mathbf{G}$. Tad $\mathbf{GF} = \mathbf{E}_n$ un $\mathbf{FG} = \mathbf{E}_m$. Tas pēc definīcijas nozīmē, ka matrica $\mathbf{F}$ ir abpusēji invertējama.

f nav LI $\Longrightarrow$ f nav injektīvs vai f nav sirjektīvs.

f nav injektīvs $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}ull(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $r_K(\mathbf{F}) < n$ - $\mathbf{F}$ kolonnu rangs nav pilns $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{F}$ neeksistē kreisā inversā matrica.

f nav sirjektīvs $\Longrightarrow$ $\forall$ $\mathbf{F}$: $\dim Im(f) = \dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\rangle < n$. Bet $\dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\rangle = r(\mathbf{F}) < n$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{F}$ neeksistē kreisā inversā matrica.

4. f^{-1} matrica ir $\mathbf{G} \implies \mathbf{GF} = \mathbf{E}_n \implies \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}$. ■

1.2. Lineāru telpu klasifikācija

Kad divus matemātiskus objektus var uzskatīt par līdzīgiem pēc struktūras ignorējot nebūtiskas detaļas (apzīmējumus, attēlošanas veidu u.c)?

- skaitļi - vienādība,
- kopas - elementu skaits,
- ģeometriskas figūras - kongruence, varbūt līdzība.

Kad divas LT uzskatīt par līdzīgām pēc struktūras?

- laukiem jābūt vienādiem ($\mathbb{Q}$-lineāra telpa un $\mathbb{R}$-lineāra telpa ir dažādas),
- dimensijām jābūt vienādām (plakne un telpa ir dažādas),
- vai ar to pietiek?

1.2. teorēma. L - k-lineāra LT, $\dim(L) = n$. Tad

$$\boxed{L \simeq k^n.}$$

PIERĀDĪJUMS Uzrādīsim LI $L \to k^n$.

Izvēlēsimies LT L bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.
LT k^n izvēlēsimies kanonisko bāzi $\mathcal{B}_{k^n} = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n\}$,kur

$$\mathbf{s}_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i-\text{tajā vietā}}, ..., 0)$$

Definēsim $f : L \to k^n$ šādi:

1. definēsim funkciju $f_0 : \mathcal{B}_L \to \mathcal{B}_{k^n}$:
$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}_i.$$
2. turpināsim f_0 līdz LA $f : L \to k^n$:
$$f(\mathbf{l}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i.$$

Jāpierāda, ka f ir bijektīva funkcija.

Sirjektivitāte

$\forall\ w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{s}_i \in k^n$ izpildās $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(\mathbf{e}_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i\Big) \Longrightarrow$ $w \in Im(f)$.

Injektivitāte

$f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') \Longrightarrow f(\mathbf{l} - \mathbf{l}') = \mathbf{0}$.

$\mathbf{l} - \mathbf{l}' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i \Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow$ $\forall\ i\ \gamma_i = 0 \Longrightarrow \mathbf{l} - \mathbf{l}' = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{l} = \mathbf{l}'$. ■

1.1. piezīme. Seko, ka k^n var uzskatīt par LT struktūras etalonu.

1.3. teorēma. *L, V - k-lineāras LT. Tad*

$$L \simeq V \iff \dim L = \dim V.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\dim L = n$, $\dim V = m$. Saskaņā ar teorēmu par LT izomorfismu ar vektoru telpu $\begin{cases} L \simeq k^n \\ V \simeq k^m \end{cases}$.

$n = m$

$$\begin{cases} f : L \to k^n - \text{ LI} \\ g : V \to k^m - \text{ LI} \end{cases} \Longrightarrow g^{-1} \circ f : L \to V \text{ - LI.}$$

$n \neq m$, $n > m$

$$f : L \to V \text{ - LI} \Longrightarrow \dim L = \underbrace{\dim Im(f)}_{=\dim V} + \underbrace{\dim Ker(f)}_{=0}$$

$\Longrightarrow$ $n = m$ - pretruna. ■

2. Lineāra operatora struktūra

2.1. Invariantās apakškopas

$f : A \longrightarrow A$ - funkcija. $S \subseteq A$ sauc par *f-invariantu apakškopu*, ja

$$\forall\ s \in S : \ f(s) \in S.$$

Simboliski to apzīmē kā $f(S) \subseteq S$.

2.1. piemērs. f - A permutācija, invariantās apakškopas - cikli.
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = x + 1$, invariantas apakškopas ir
$\mathbb{N}_m = \mathbb{N} \backslash \{1, ..., m - 1\}$.

2.2. Invariantās apakštelpas

$f \in \mathcal{E}nd(L)$. $V \leq L$ sauc par *invariantu apakštelpu* (*f-invariantu apakštelpu, IA*), ja

$$\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V, \text{ citiem vārdiem - } f(V) \subseteq V.$$

Visu f-invariantu apakštelpu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{I}nv(f)$.

2.2. piemērs. $\forall\ f \in \mathcal{E}nd(L)\ \exists$ vismaz divas IA - L, $\{\mathbf{0}\}$.
$L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi - $\langle(1,0)\rangle$ ir IA,
f - rotācija par $\alpha \neq 0$ - nav citu IA.

2.1. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.

1. $V \in \mathcal{I}nv(f) \implies f$ sašaurinājums uz V ir LA $V \to V$.
2. $Ker(f), Im(f) \in \mathcal{I}nv(f)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V \implies f(V) \subseteq V \implies f$ sašaurinājums uz V ir korekti definēta funkcija. LA aksiomas izpildās.

2. $\mathbf{l} \in Ker(f) \iff f(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \implies f(f(\mathbf{l})) = \mathbf{0} \implies$
$f(Ker(f)) \subseteq Ker(f)$.

$\mathbf{l} \in Im(f) \implies f(\mathbf{l}) \in Im(f) \implies f(Im(f)) \subseteq Im(f)$. ■

2.3. Īpašvektori un īpašvērtības

2.3.1. Pamatfakti

L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.

$\mathbf{l} \in L, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, sauc par f *īpašvektoru*, ja $\langle \mathbf{l} \rangle$ ir f-invarianta apakštelpa. Citiem vārdiem, sakot:

- $\exists\ \lambda \in k : f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l}$ (bezkoordinātu formā),
- $\begin{cases} \mathbf{l} \sim \mathbf{c} \\ f \sim \mathbf{F} \end{cases} \implies \mathbf{F}\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$, attiecībā uz $\forall\ L$ bāzi (koordinātu formā).

Šajos terminos λ sauc par f *īpašvērtību*, kas atbilst $\mathbf{l}$.

$\forall$ īpašvektoram $\mathbf{l}$ īpašvērtība ir noteikta viennozīmīgi.

Visu īpašvektoru kopu ar īpašvērtību λ apzīmē ar L^{λ}.

L^{λ} ir L lineāra apakštelpa:

- $f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l} \implies f(c\mathbf{l}) = cf(\mathbf{l}) = c\lambda \mathbf{l} = \lambda(c\mathbf{l}) \implies$

$$\mathbf{l} \in L^{\lambda} \implies c\mathbf{l} \in L^{\lambda}.$$

- $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L^\lambda \implies f(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \lambda\mathbf{l} + \lambda\mathbf{l}' = \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{l}')$.

Visu f īpašvērtību kopu sauc par f *spektru* ($\mathcal{S}pec(f)$).

2.3. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi. $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \implies \mathbf{e}_1 \in L^1$, $f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 \implies \mathbf{e}_2 \in L^{-1}$.

2.2. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\lambda \in \mathcal{S}pec(f)$.
2. $Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$.
3. $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, kur $\mathbf{F}$ ir f matrica attiecībā uz patvaļīgu L bāzi.

PIERĀDĪJUMS

1. $\iff$ **2.**

$\lambda \in \mathcal{S}pec(f) \iff \exists\, \mathbf{l} \in L: \ f(\mathbf{l}) = \lambda\mathbf{l} = \lambda \cdot \mathrm{id}(\mathbf{l}) \iff$
$(f - \lambda \cdot \mathrm{id})(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{l} \in Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \iff Ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

2. $\iff$ **3.**

$Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff \mathcal{N}ull(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff$
$\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}$ ir neinvertējama matrica $\iff \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. ■

Polinomu $R_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})$ sauc par matricas $\mathbf{F}$ *raksturīgo polinomu.*

2.3.2. Algoritmi

Gausa metodes algoritms

1. atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,

2. noteikt ar kādām parametra λ vērtībām LVS

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ir netriviāli atrisinājumi $\mathbf{x}$, var izmantot $\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}$ pakāpienveida formu, visu šādu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.

3. atrast $\forall\ \lambda_0 \in \mathcal{S}pec(f)$ atbilstošos īpašvektorus - atrisināt LVS $(\mathbf{F} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vai $\mathbf{F}\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}$ attiecībā uz $\mathbf{x}$.

Raksturīgā polinoma algoritms

1. atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
2. atrisināt *raksturīgo vienādojumu*

$$R_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

visu sakņu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.

3. atrast $\forall\ \lambda_0 \in \mathcal{S}pec(f)$ atbilstošos īpašvektorus - atrisināt LVS $(\mathbf{F} - \lambda_0 \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vai $\mathbf{F}\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}$ attiecībā uz $\mathbf{x}$.

2.4. piemērs. $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 15 \\ \hline -2 & -7 \end{array}\right]$.

<u>Gausa metodes algoritms</u>

$(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$

$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 15x_2 = 0 \\ -2x_1 + (-7-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$. Paplašinātās matricas pakāpienveida forma ir

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{1}{2}(-7-\lambda) & 0 \\ \hline 0 & 15 + \frac{1}{2}(4-\lambda)(-7-\lambda) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & * & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2 + 3\lambda + 2) & 0 \end{array}\right]$$

Seko, ka $\exists$ netriviāli LVS atrisinājumi $\iff$ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff$ $\lambda \in \{-2, -1\}$.

<u>Raksturīgā polinoma algoritms</u>

$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = \det \left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right] = (4-\lambda)(-7-\lambda) + 30 =$ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda \in \{-2, -1\}$.

Īpašvektori

$$\lambda = -1 \implies \left[\begin{array}{c|c} 5 & 15 \\ \hline -2 & -6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} -3c \\ \hline c \end{array}\right]$$

$$\lambda = -2 \implies \left[\begin{array}{c|c} 6 & 15 \\ \hline -2 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} (-5/2)c \\ \hline c \end{array}\right]$$

3. 4.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Atrast matricu raksturīgos polinomus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ \hline 7 & 9 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 5 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

4.2 Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 5 & -4 \\ \hline 9 & -7 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & -3 & -1 \\ \hline -12 & 17 & 6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 5 & 6 & -5 \\ \hline 7 & 7 & 7 & -6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$.

4.3 Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$, virs $\mathbb{R}$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$, virs $\mathbb{C}$.

4.4 Atrast īpašvērtības un īpašvektorus LO polinomu telpās.

(a) $L = \mathbb{R}[X]_3$, $f(p) = p'$;

(b) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $f(p) = (X \cdot p)'$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.5 Invertējamai $n \times n$ matricai $\mathbf{A}$ ir n īpašvērtības $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (iespējams, dažas ir vienādas). Atrast LO $f(\mathbf{M}) = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}$ īpašvērtības.