DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro attēlojumu īpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- katram LA var definēt divas svarīgas apakštelpas - *attēlu* un *kodolu* un pētīt to īpašības,
- LA var definēt lineāras operācijas un kompozīcijas operāciju, tās var uzdot matricu formā,
- mainot LT bāzes, attiecīgi mainās attēlojumu matricas.

Svarīgākie jēdzieni: LA attēls, LA kodols, LA summa un reizināšana ar lauka elementu, LA kompozīcija, LA matricas maiņa pārejot uz citām bāzēm,

Svarīgākie fakti un metodes: LA attēla un kodola īpašības, attēla un kodola atrašana, attēla un kodola dimensiju summas īpašība, LA veido LT, funkcijas turpināšana uz LA, LA operāciju realizācija ar matricām, LA matricas maiņas formula.

1. Lineāro attēlojumu īpašības

1.1. Lineārie attēlojumi un apakštelpas

Par LA $f : L \to V$ *attēlu* $Im(f)$ sauc f (kā funkcijas) attēlu:

$$Im(f) = \{\mathbf{y} \in V \mid \exists\, \mathbf{x} \in L : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} = \bigcup_{\mathbf{x} \in L} f(\mathbf{x}).$$

f rangu $r(f)$ definē kā $\dim Im(f)$.

Par LA $f : L \to V$ *kodolu* $Ker(f)$ sauc $f^{-1}(\mathbf{0})$:

$$Ker(f) = \{\mathbf{x} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\mathbf{0}).$$

1.1. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, f - projekcija uz x-asi, $Ker(f) = \langle (0,1) \rangle$, $Im(f) = \langle (1,0) \rangle$.

$L = k[x]$, $f(p) = p'$, $Ker(f) = \langle 1 \rangle$, $Im(f) = L$.

1.1. teorēma. L, V - LT, $f : L \to V$ - LA.

1. f - injektīvs $\iff$ $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. f - sirjektīvs $\iff$ $Im(f) = V$.
3. $Im(f) \leq V$.
4. $Ker(f) \leq L$.

PIERĀDĪJUMS

1. Abos virzienos pierādām kontrapozitīvi.

$Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\} \implies \exists\, \mathbf{t} \neq \mathbf{0} :\ f(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \implies$
$f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \implies$ f nav injektīva funkcija.

f nav injektīva $\implies \exists\, \mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2 :\ f(\mathbf{t}_1) = f(\mathbf{t}_2) \implies$
$f(\mathbf{t}_1) - f(\mathbf{t}_2) = f(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{0} \implies \begin{cases} f(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 \neq \mathbf{0} \end{cases} \implies$
$\mathbf{t}_1 - \mathbf{t} \in Ker(f) \implies Ker(f) \supsetneq \{\mathbf{0}\}$.

2. Seko no attēla definīcijas.

3. $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in L$. Tad $\begin{cases} f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{u}') = f(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \in Im(f) \\ \lambda f(\mathbf{u}) = f(\lambda \mathbf{u}) \in Im(f). \end{cases}$

4. $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in Ker(f): \ f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') = \mathbf{0}_V \implies$

$$\begin{cases} f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}') = \mathbf{0}_v \\ f(\lambda \mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l}) = \lambda \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V. \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{l} + \mathbf{l}' \in Ker(f) \\ \lambda \mathbf{l} \in Ker(f) \end{cases}$$

$\implies Ker(f) \leq L.$ ■

1.2. Attēla un kodola īpašības

$S \subseteq L$. Ja $\mathbf{s}$ ir elementa $s \in S$ pieraksts koordinātu formā attiecībā uz fiksētu bāzi, tad apzīmēsim to ar $s \sim \mathbf{s}$.

$f \in \mathcal{H}om(L, V)$. Ja f matrica attiecībā uz izvēlētām bāzēm ir $\mathbf{F}$, tad apzīmēsim to ar $f \sim \mathbf{F}$.

1.2. teorēma. (*Im un Ker apraksts koordinātu formā*) L, V - LT, $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, $\mathbf{F} = \left[\ \mathbf{k}_n \ \middle| \ ... \ \middle| \ \mathbf{k}_n \ \right]$ - f matrica attiecībā uz izvēlētām bāzēm $\mathcal{B}_L$, $\mathcal{B}_V$.

1. $Im(f) \sim \langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle$ ($\mathbf{F}$ kolonnu telpa).
2. $Ker(f) \sim \mathcal{N}ull(\mathbf{F})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\forall\ \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \in L: \ f(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) \Longrightarrow$

$$Im(f) = \langle f(\mathbf{e}_1), ..., f(\mathbf{e}_n) \rangle.$$

$\mathbf{F}$ kolonnas ir $f(\mathbf{e}_i)$ koordinātu kolonnas: $\mathbf{k}_i \sim f(\mathbf{e}_i) \Longrightarrow$

$$Im(f) = \langle f(\mathbf{e}_1), ..., f(\mathbf{e}_n) \rangle.$$

2. Koordinātu formā $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$.
$f(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \Longrightarrow Ker(f) \sim \mathcal{N}ull(\mathbf{F})$. ■

1.3. teorēma. L, V - LT, $f : L \to V$ - LA. $\dim(L) < \infty \implies$

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim L.$$

PIERĀDĪJUMS
Izvēlēsimies $Ker(f) = K$ bāzi $\mathcal{B}_K = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.
Papildināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m\}$.

Pierādīsim, ka $f(\mathcal{B}_L \backslash \mathcal{B}_K) = \{f(\mathbf{g}_1), ..., f(\mathbf{g}_m)\}$ ir $Im(f)$ bāze. No tā sekos teorēmas apgalvojums par dimensijām: $\dim L = n + m$.

Veidotājsistēma

$\mathbf{t} \in Im(f) \iff \exists\, \mathbf{l} \in L : \ \mathbf{t} = f(\mathbf{l})$.

$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j \implies$

$$\mathbf{t} = f(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{f(\mathbf{e}_i)}_{=\mathbf{0}} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j).$$

Lineārā neatkarība

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j f(\mathbf{g}_j) = \mathbf{0} \implies f\Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j\Big) = \mathbf{0} \implies$$

$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j \in Ker(f) \implies \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i$. Ja vismaz viens no $\mu_j \neq 0$, tad $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija, kas saista $\mathcal{B}_L$ elementus $\implies \overline{\mathcal{B}_L}$ - pretruna. ■

1.3. Operācijas ar lineārajiem attēlojumiem

1.3.1. Lineārās īpašības

Kopā $\mathcal{H}om(L, V)$ var definēt šādas *lineāras operācijas:*

- summu: $(f, g) \to f + g$:

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x});$$

- reizināšanu ar lauka elementu: $(\lambda, f) \to \lambda f$:

$$(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

1.4. teorēma. L, V - k-lineāras telpas. Tad $\mathcal{H}om(L, V)$ ir k-lineāra telpa.

PIERĀDĪJUMS

1. Jāpārbauda, ka LA summa un reizinājums ar skaitli ir LA.
2. Jāpārbauda visas LT aksiomas. ■

1.3.2. Kompozīcija

L, T, Z - k-lineāras telpas, $\begin{cases} f : L \to T \\ g : T \to Z \end{cases}$ - LA. Var definēt *lineāro attēlojumu kompozīciju* $g \circ f$:

$$g \circ f : L \to Z,$$
$$(g \circ f)(\mathbf{l}) = g(f(\mathbf{l})).$$

1.2. piemērs. $L = T = Z = k[X]$, $f(p) = X \cdot p$, $g(q) = q'$,
$(g \circ f)(p) = (X \cdot p)'$.

1.5. teorēma. L, T, Z - k-lineāras telpas, $\begin{cases} f : L \to T \\ g : T \to Z \end{cases}$ - LA. Tad $g \circ f : L \to Z$ ir LA.

PIERĀDĪJUMS
$(g \circ f)(\mathbf{l} + \mathbf{u}) = g\Big(f(\mathbf{l} + \mathbf{u})\Big) = g\Big(f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{u})\Big) =$
$g\Big(f(\mathbf{l})\Big) + g\Big(f(\mathbf{u})\Big) = (g \circ f)(\mathbf{l}) + (g \circ f)(\mathbf{u})$.

$$(g \circ f)(\lambda \mathbf{l}) = g(f(\lambda \mathbf{l})) = g(\lambda f(\mathbf{l})) = \lambda g(f(\mathbf{l})) = \Big(\lambda(g \circ f)\Big)(\mathbf{l}). \blacksquare$$

1.4. Lineārie attēlojumi un matricas

1.4.1. Lineāro operāciju realizācija ar matricām

1.6. teorēma. L, V - LT ar fiksētam bāzēm, $f, g \in \mathcal{H}om(L, V)$ ar matricām $\mathbf{F}, \mathbf{G}$. Tad

1. $f + g$ matrica ir $\mathbf{F} + \mathbf{G}$.

2. λf matrica ir $\lambda\mathbf{F}$.

PIERĀDĪJUMS

1. $(f+g)(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i) + g(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j + \sum_{j=1}^{n} g_{ji}\mathbf{t}_j =$

$$\sum_{j=1}^{n} (f_{ji}+g_{ji})\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\mathbf{t}_j \implies \mathbf{S} = \mathbf{F} + \mathbf{G}.$$

2. $(\lambda f)(\mathbf{e}_i) = \lambda f(\mathbf{e}_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j =$

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda f_{ji})\mathbf{t}_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}\mathbf{t}_j \implies \mathbf{M} = \lambda\mathbf{F}. \ \blacksquare$$

1.4.2. Kompozīcijas realizācija ar matricām

1.7. teorēma. L, T, Z - LT, $\begin{cases} f \in Hom(L,T) \text{ ar matricu } \mathbf{F} \\ g \in Hom(T,Z) \text{ ar matricu } \mathbf{G}. \end{cases}$

Tad $g \circ f$ matrica ir $\mathbf{GF}$.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim apzīmējumus $\mathbf{F} = \{f_{ij}\}$, $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$, $\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \mathbf{GF}$.

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j \\ g(\mathbf{t}_j) = \sum\limits_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k. \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f)(\mathbf{e}_i) = g\Big(f(\mathbf{e}_i)\Big) =$$

$$g\Big(\sum_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} g(\mathbf{t}_j) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji}\Big(\sum_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{l} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{kj} f_{ji}\Big)}_{=h_{ki}} \mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{l} h_{ki}\mathbf{z}_k. \blacksquare$$

1.5. Bāzes maiņa un lineārie attēlojumi

1.5.1. Atkārtojums

L - LT, $\dim(L) = n$,
$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$,
$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - divas sakārtotas L bāzes.

Izteicām katras bāzes elementus kā otras bāzes lineāras kombinācijas, ieguvām divas matricas:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}'_1 = s_{11}\mathbf{e}_1 + ... + s_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 = s_{12}\mathbf{e}_1 + ... + s_{n2}\mathbf{e}_n \\ ... \\ \mathbf{e}'_n = s_{n1}\mathbf{e}_1 + ... + s_{nn}\mathbf{e}_n \end{array}\right. \quad \rightleftarrows \mathbf{S}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + ... + a_{n1}\mathbf{e}'_n \\ \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}'_1 + ... + a_{n2}\mathbf{e}'_n \\ ... \\ \mathbf{e}_n = a_{1n}\mathbf{e}'_1 + ... + a_{nn}\mathbf{e}'_n \end{array}\right. \quad \rightleftarrows \mathbf{A}$$

Secinājām, ka

- $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S}$ (*pārejas matrica*), $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{A}$,
- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} \text{ - elementa koordinātu kolonna bāzē } \mathcal{B} \\ \mathbf{l}' \text{ - elementa koordinātu kolonna bāzē } \mathcal{B}' \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}' = \mathbf{A}\mathbf{l} \\ \mathbf{l} = \mathbf{S}\mathbf{l}' = \mathbf{A}^{-} \end{array} \right.$

1.5.2. Lineāra attēlojuma matricas maiņa pārejot uz citām bāzēm

L, V - galīgi ģenerētas LT, pieņemsim, ka katrā no telpām ir izvēlētas divas bāzes - "sākotnējā" un "mainītā":

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \mathcal{B}'_L = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\} \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}, \mathcal{B}'_V = \{\mathbf{t}'_1, ..., \mathbf{t}'_m\} \end{array} \right.$$

Apzīmēsim pārejas matricas ar $\mathbf{A}$ un $\mathbf{T}$ (elementu koordinātu kolonnas apzīmēsim ar $\mathbf{c}$ un $\mathbf{d}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} L: \ \mathbf{c}' = \mathbf{A}\mathbf{c}, \mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}' \\ V: \ \mathbf{d}' = \mathbf{T}\mathbf{d}, \mathbf{d} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d}' \end{array} \right.$$

Dots $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, tā matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ ir $\mathbf{F}$.

Atradīsim f matricu $\mathbf{F}'$ attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}'_L$ un $\mathcal{B}'_V$:

- sākam ar elementu $\mathbf{l}$, kura koordināšu kolonna jaunajā bāzē ir $\mathbf{c}'$, izsakām to caur veco bāzi -
  $\mathbf{l} \sim \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$,
- atrodam elementa attēlu attiecībā uz veco bāzi -
  $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}') = (\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_V$,
- atrodam elementa attēlu attiecībā uz jauno bāzi -
  $f(\mathbf{l}) \sim \mathbf{T}(\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{c}' = (\mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}'_V$

Seko, ka $\mathbf{F}' = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1}$.

1.1. piezīme. Ja $L = V$, un dotas divas bāzes $\mathcal{B}_L$,$\mathcal{B}'_L$ ar pārejas matricu $\mathbf{A}$, tad $\mathbf{F}' = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}$.

1.3. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & -2 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{F}' = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right].$$

2. 2.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Atrast LA f attēlus un kodolus.

(a) $L = k^3$, $f : L \to k$, $f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3$;

(b) $L = k^3$, $f : L \to L$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 3 \end{array}\right]$, kanoniskajā bāzē;

(c) $L = k[X]_3$, $f(p) = p'$;

(d) $L = \mathcal{M}at(2, 2, k)$, $f : L \to L$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\mathbf{E}_{12}$.

2.2 Atrast LO matricu pēc bāzes maiņas.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_L$ - kanoniskā bāze, $\mathcal{B}'_L = \{(2, -1), (3, 4)\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 5 & 4 \end{array}\right]$;

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_L$ - kanoniskā bāze, $\mathcal{B}'_L = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$;

(c) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $\mathcal{B}_L$ - monomu bāze, $\mathcal{B}'_L = \{1, X+1, X^2+X+1\}$,

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & -4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 2 \\ \hline 2 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

2.3 Atrast LA matricu pēc bāzes maiņas abās LT.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$ - kanoniskās bāzes, $\mathcal{B}'_L = \{(3,-2),(2,0)\}$, $\mathcal{B}'_V = \{(0,0,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right].$