DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Lineārie attēlojumi 5
1.1. Definīcijas 5
1.2. Pamatīpašības 6
1.3. Klasiskie piemēri 7
1.3.1. Dabiskie lineārie attēlojumi 7
1.3.2. Vektoru/ğeometriskie attēlojumi 8
1.3.3. Aritmētisko vektoru attēlojumi 9
1.3.4. Matricu attēlojumi 9
1.3.5. Funkciju attēlojumi 9

2. Lineāro attēlojumu matricu pieraksts 10
2.1. Bāzes nozīme 11
2.2. LA matrica 11
2.3. Lineāra attēlojuma darbības aprēķināšana 13
2.4. Klasisko piemēru matricas 15
2.4.1. Dabiskie attēlojumi 15
2.4.2. Vektoru/punktu operācijas 16

3. 2.mājasdarbs 17
3.1. Obligātie uzdevumi 17
3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 18

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro attēlojumu teorijas pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt funkcijas starp lineārajām telpām, kas saglabā operācijas - *lineārus attēlojumus* un pētīt šādu funkciju īpašības,
- lineārus attēlojumus var uzdot matricu formā.

Svarīgākie jēdzieni: k-lineārs attēlojums, izomorfisms, operators, funkcionālis, dabiskie lineārie attēlojumi - nulles, vienības, apakštelpas iekļaušanas, elementa fiksēšanas, projekciju LA, vektoru, aritmētisko telpu un matricu LA piemēri, LA matrica attiecībā uz dotajām bāzēm.

Svarīgākie fakti un metodes: LA pamatīpašības, LA noteikšana ar tā darbību uz bāzes elementiem, LA darbības aprēķināšana izmantojot matricu reizināšanu.

1. Lineārie attēlojumi

1.1. Definīcijas

L,V - k-lineāras telpas. Funkciju $f : L \to V$ sauc par *k-lineāru attēlojumu (LA, lineāru homomorfismu)*, ja

- $f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}')$ - f *saglabā saskaitīšanu;*
- $f(\lambda \mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l})$ - f *saglabā reizināšanu.*

Visu LA $L \to V$ kopu apzīmē ar $\mathcal{H}om(L, V)$.

Speciālgadījumi:

- LA $L \to L$ sauc par *lineāru operatoru (LO)* vai *endomorfismu.*
- LA $L \to k$ sauc par *lineāru funkcionāli (LF).*
- bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI).*

1.2. Pamatīpašības

1.1. teorēma. L, V - LT, $f : L \to V$ - LA.

1. $f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{l}_i)$.
2. $f(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_V$.
3. $f(-\mathbf{l}) = -f(\mathbf{l})$.

PIERĀDĪJUMS

1.

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{l}_i + \lambda_n \mathbf{l}_n\Big) = \underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_n \mathbf{l}_n) =$$

$$\underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_{n-1} \mathbf{l}_{n-1}) + f(\lambda_n \mathbf{l}_n) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i \mathbf{l}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{l}_i).$$

2. $f(\mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L + \mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L) + f(\mathbf{0}_L) \Longrightarrow f(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_T.$

3. $\underbrace{f(\mathbf{0}_L)}_{=\mathbf{0}_T} = f(\mathbf{l} - \mathbf{l}) = f(\mathbf{l}) + f(-\mathbf{l}) \Longrightarrow -f(\mathbf{l}) = f(-\mathbf{l}).$ ■

1.3. Klasiskie piemēri

1.3.1. Dabiskie lineārie attēlojumi

Nulles attēlojums

L, V - LT, definēsim $O : L \to V$, $\forall\ \mathbf{l} \in L\ O(\mathbf{l}) = \mathbf{0}_T$.

Vienības attēlojums

$\forall\ L$ definēsim $\mathrm{id} : L \to L$, $\mathrm{id}(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Apakštelpas iekļaušana

$\forall\ L, L \leq V$, definēsim $\iota : L \to V$, $\iota(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Elementa fiksēšana

L - k-lineāra telpa. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim $\chi_{\mathbf{l}} : k \to L$ ar nosacījumu $\chi_{\mathbf{l}}(a) = a \cdot \mathbf{l}$.

1.3.2. Vektoru/ğeometriskie attēlojumi

- Simetrija attiecībā uz taisni vai centru,
- rotācija ap centru,
- homotētija,
- projekcija uz taisni.

1.3.3. Aritmētisko vektoru attēlojumi

- Elementu kārtības maiņa,
- jebkuras koordinātes aizvietošana ar iepriekšējo koordināšu lineāru kombināciju.

1.3.4. Matricu attēlojumi

- Transponēšana,
- reizināšana ar fiksētu matricu,
- apakšmatricas izgriešana.

1.3.5. Funkciju attēlojumi

- Reizināšana ar fiksētu funkciju,
- atvasināšana.

2. Lineāro attēlojumu matricu pieraksts

LA tika definēti bezkoordinātu formā. Tagad sāksim uzdot un pētīt LA koordinātu formā - fiksējot bāzes un izmantojot elementu koordinātes.

Ja L - LT, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - sakārtota bāze, $\mathbf{l} \in L$: $\mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}_i$, tad $\mathbf{l}$ var uzdot *koordinātu kolonnas* formā:

$$\mathbf{l} \sim \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{array} \right].$$

Parasti lineārās algebras lietojumos - dabaszinātnēs, inženierzinātnēs u.c. tiek izmantots koordinātu pieraksts. Ja redzat vektorus vai matricas, tā ir pazīme, ka tiek izmantota lineārā algebra.

2.1. Bāzes nozīme

2.1. teorēma. $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. Tad f ir viennozīmīgi noteikts ar tā darbību uz $\mathcal{B}_L$ elementiem.

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{l} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j \implies$

$$f(\mathbf{l}) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} f\Big(\alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j). \blacksquare$$

2.2. LA matrica

L, V - LT ar bāzēm $\begin{cases} \mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}. \end{cases}$ Sākot no šīs vietas uzskatīsim, ka ir dotas *sakārtotas bāzes.*

Pieņemsim, ka ir dots $f \in Hom(L, V)$, ko var viennozīmīgi uzdot ar tā darbību uz L bāzes elementiem:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{21}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m1}\mathbf{t}_m, \\ f(\mathbf{e}_2) = f_{12}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m2}\mathbf{t}_m, \\ ..., \\ f(\mathbf{e}_n) = f_{1n}\mathbf{t}_1 + f_{2n}\mathbf{t}_2 + ... + f_{mn}\mathbf{t}_m. \end{cases}$$

Matricu $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ \hline f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline f_{m1} & f_{m2} & ... & f_{mn} \end{array}\right]$ sauc par f matricu attiecībā uz sakārtotajām bāzēm $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$.

2.1. piezīme. Redzam, ka $\mathbf{F}$ j-tā kolonna ir $f(\mathbf{e}_j)$ koordinātu kolonna $\left[\begin{array}{c} f_{1j} \\ \hline ... \\ \hline f_{nmj} \end{array}\right]$ attiecībā uz sakārtoto bāzi $\mathcal{B}_V$.

2.2. piezīme. Svarīgi atcerēties, ka **matrica ir atkarīga no bāzēm**.

2.3. piezīme. Ir jāizšķir 3 gadījumi:

- attēlojums ir starp dažādām LT, bāzes vienmēr ir dažādas,
- attēlojums ir vienā LT, atiecībā uz divām dažādām sakārtotām bāzēm,
- attēlojums ir vienā LT, attiecībā uz vienu bāzi.

2.1. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, $f : L \to L$ - simetrija attiecība uz x-asi. Izmantosim kanonisko bāzi $\{(1,0),(0,1)\}$.

$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 \implies f$ matrica attiecībā uz kanonisko bāzi ir $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$.

2.3. Lineāra attēlojuma darbības aprēķināšana

Izmantojot matricu reizināšanas operāciju var aprēķināt $f(\mathbf{l})$, ja ir zināmas $\mathbf{l}$ koordinātes attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j .$$

1. $\mathbf{l}$ reprezentējam kā kolonnas matricu: $\mathbf{l} \sim \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \ldots \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.

2. Atrodam

$$f(\mathbf{l}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum_{i=1}^{n} f_{ij} \mathbf{t}_i \Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \alpha_j \Big) \mathbf{t}_i \sim \left[\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{1j}\alpha_j \\ \hline \ldots \\ \hline \sum\limits_{j=1}^{n} f_{nj}\alpha_j \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \hline f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline f_{m1} & f_{m2} & \ldots & f_{mn} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \\ \hline \ldots \\ \hline \alpha_n \end{array}\right] = \mathbf{Fl}.$$

2.2. piemērs. $\mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \implies \mathbf{Fl} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ \hline -2 \end{array}\right]$.

2.4. Klasisko piemēru matricas

2.4.1. Dabiskie attēlojumi

Nulles attēlojums

- Nulles matrica.

Vienības attēlojums

$\mathrm{id}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \Longrightarrow$ matrica ir $\mathbf{E}_n$.

Elementa fiksēšana

L - k-lineāra telpa, L bāze - $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, k bāze - $\{1\}$. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim

$$\chi_{\mathbf{l}} : k \to L,$$
$$\chi_{\mathbf{l}}(a) = a\mathbf{l}.$$

Ja $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$, tad χ matrica ir kolonna $\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \ldots \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.

Funkcionāļi

L - k-lineāra telpa, LF $\varphi : L \to k$. φ matrica ir rinda

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \varphi(\mathbf{e}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{e}_n) \end{array}\right].$$

2.4.2. Vektoru/punktu operācijas

Projekcija uz x-asi: $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Rotācija ap centru par $\pi/2$: $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$.

3. 2.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LA $f : L \to V$:

(a) $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c}$, kur $\mathbf{c} \in V$ ir fiksēts;
(b) $L = V$, $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c} + \beta\mathbf{l}$, kur $\mathbf{c} \in L$ - fiksēts un $\beta \in k$ - fiksēts.

2.2 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LA $f : k^3 \to k^3$:

(a) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, 0, x_1)$;
(b) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2, 0, 0)$;
(c) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3 + 1)$.

2.3 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LF $f : L \to k$:

(a) $L = k^n$, $f((x_1, ..., x_n)) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;
(b) $L = k[X]$, $f(p(X)) = p(0)p(1)$;
(c) $L = \mathcal{M}at(n, n, k)$, $f(\mathbf{M}) = \det \mathbf{M}$.

2.4 Ir dots LO $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ tāds, ka

$$\begin{cases} f((1,0,2)) = (3,-1,1) \\ f((0,2,-3)) = (2,1,0) \\ f((-1,1,0)) = (0,1,2). \end{cases}$$

Atrast $f((1,2,3))$.

2.5 Atrast doto LA matricas attiecībā uz dotajām bāzēm:
 (a) $L = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, 0)$, kanoniskā bāze;
 (b) $L = \mathbb{C}[X]_3$, $f(p(X)) = (X^2 p(X))''$, monomu bāze;
 (c) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^T$, kanoniskā bāze.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.6 Atrast doto LA f matricas attiecībā uz patvaļīgi izvēlētam bāzēm:
 (a) $L = \mathcal{M}at(m,n,k)$, $V = \mathcal{M}at(p,n,k)$. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(p,m,k)$- fiksēta matrica. $f : L \to V :\ f(\mathbf{M}) = \mathbf{AM}$;

(b) $L = \mathcal{M}at(n, n, k)$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$- fiksēta matrica. $f : L \to L :\ f(\mathbf{M}) = [\mathbf{A}, \mathbf{M}] \stackrel{def}{=} \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$.