DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāru nevienādību sistēmu risināšanas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- LNS risināšanā var izmantot nezināmo pakāpeniskas izslēgšanas metodi.

Svarīgākie jēdzieni: lineāru nevienādību sistēma, LNS vispārīgais un matricu pieraksti, LNS atrisinājumu kopa, LNS elementārie pārveidojumi, LNS sakārtotā un standarta normālforma.

Svarīgākie fakti un metodes: viena nezināmā izslēgšana, Furjē-Mockina metode.

1. Lineāru nevienādību sistēmu risināšana virs $\mathbb{R}$

Šajā sadaļā lauks $k = \mathbb{R}$.

1.1. Ievads

1.1.1. Definīcija

$\gtreqless$ var nozīmēt jebkuru no simboliem $\leq, \geq, =$.

Nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +... & +a_{1n}X_n & \gtreqless b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +... & +a_{mn}X_n & \gtreqless b_m \end{cases}$$

sauc par *lineāru nevienādību sistēmu (LNS).*

Virkni $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ sauc par LNS atrisinājumu, ja tā apmierina katru nevienādību.

Divas LNS sauc par ekvivalentām, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas.

1.1. piemērs.

1.1.2. LNS pieraksta veidi

Vispārīgais pieraksts Sistēmas veidā.

Paplašinātās matricas pieraksts

Definēsim

- $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$,
- $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline ... \\ \hline b_m \end{bmatrix}$,

- $\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \hline \dots \\ \hline z_m \end{array}\right]$, kur $z_i \begin{cases} +/1, \text{ ja } \geq, \\ -/-1, \text{ ja } \leq, \\ 0, \text{ ja } =. \end{cases}$

Par LNS paplašināto matricu sauksim $m \times (n+2)$ matricu $[\mathbf{A}|\mathbf{z}|\mathbf{b}]$.

1.1.3. Elementārie pārveidojumi

REP1 Rindu maiņa - R_{ij}.

REP2 Rindas reizināšana ar nenulles skaitli λ - $R_i(\lambda)$, mainās nevienādības zīme atkarībā no λ zīmes.

Speciālgadījums - $R_i(-1)$ - nevienādības virziena maiņa.

REP3 i-tās rindas reizināšana ar $\lambda > 0$ un pieskaitīšana j-tajai rindai, ja $z_i = z_j$.

REP4 Vienādojuma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i$ *sašķelšana* - aizstāšana ar ekvivalento LNS

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i \end{cases}$$

1.1.4. LNS sakārtotā forma

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Definēsim $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, ja $x_i \leq y_i$, $\forall i$. Līdzīgi ar citiem nevienādību veidiem.

Sakārtotā forma: $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

$\forall$ LNS var pārveidot uz ekvivalentu LNS sakārtotā formā veicot REP2 ar -1 un REP4, ja nepieciešams.

1.2. Furjē-Mockina metode

1.2.1. Ievadpiemēri

1 **nezināmais**

Dota LNS

$$\begin{cases} \phantom{-2 \le{}} X \le 1 \\ -2 \le X \\ \phantom{-2 \le{}} X \le 3 \\ -1 \le X \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\max(-2,-1) \le X \le \min(1,3)$ $\Longrightarrow$ $X \in [-1,1]$.

2 **nezināmie**

Dota LNS

$$\begin{cases} X - Y \le 1 \\ X + Y \ge 1 \\ X + Y \le 3 \\ X - Y \ge -1 \end{cases}$$

Atrisināsim $\forall$ nevienādību attiecībā uz Y:

$$\begin{cases} X \quad -1 \quad \le Y & \\ -X \quad +1 \quad \le Y & \\ & Y \le -X + 3 \\ & Y \le X + 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} X-1 \le -X+3 \\ X-1 \le X+1 \\ -X+1 \le -X+3 \\ -X+1 \le X+1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} X \ge 0 \\ X \le 2 \end{cases} \Longrightarrow \quad X \in [0,2].$

$\Longrightarrow \; \max(X-1, -X+1) \le Y \le \min(-X+3, X+1).$

Atrisinot nevienādības $X - 1 \lesseqgtr -X + 1$ un $-X + 3 \lesseqgtr X + 1$, atradīsim pieļaujamās Y vērtības.

1.2.2. Viena nezināmā izslēgšana

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ - $m \times n$ LNS. Definēsim jaunu $l \times n-1$ LNS $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r \leq \widehat{\mathbf{b}}_r$ izslēdzot nezināmo X_r šādā veidā.

1. Atrisināsim katru vienādojumu attiecībā uz X_r, iegūsim
   - nevienādības formā $X_r \leq g_i(X_1, ..., \overset{\uparrow}{X_r}, ..., X_n)$, dažiem i,
   - nevienādības formā $X_r \geq h_j(X_1, ..., \overset{\uparrow}{X_r}, ..., X_n)$, dažiem j.
2. Ja sistēma ir saderīga, tad $\forall\ i, j$ jāizpildās nevienādībai
$$\mathcal{N}_{ij}(r): \ h_j(X_1, ..., \overset{\uparrow}{X_r}, ..., X_n) \leq g_i(X_1, ..., \overset{\uparrow}{X_r}, ..., X_n).$$
3. Apvienosim jaunā LNS $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r \leq \widehat{\mathbf{b}}_r$ visus $\mathcal{N}_{ij}(r)$ un atlikušos vienādojumus, kas nesatur X_r.

1.1. piezīme. Visus $\mathcal{N}_{ij}(r)$ var aizvietot ar vienu nevienādību
$$\max_j h_j(X_1, ..., X_n) \leq \min_i g_i(X_1, ..., X_n).$$

1.1. teorēma. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ - LNS. $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r = \widehat{\mathbf{b}}_r$ - tiek iegūta izslēdzot X_r no $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ izmantojot aprakstīto metodi.

1. $(c_1, ..., c_n)$ ir LNS $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ atrisinājums $\Longrightarrow$ $(c_1, ..., \overset{\uparrow}{c_r}, ..., c_n)$ ir LNS $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r = \widehat{\mathbf{b}}_r$ atrisinājums.
2. $(c_1, ..., \overset{\uparrow}{c_r}, ..., c_n)$ ir LNS $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r = \widehat{\mathbf{b}}_r$ atrisinājums $\Longrightarrow$ $(c_1, ..., c_n)$ ir LNS $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ atrisinājums ar $\forall\ c_r$:

$$\max_j h_j(c_1, ..., c_n) \leq c_r \leq \min_i g_i(c_1, ..., c_n).$$

3. LNS $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ir saderīga $\Longleftrightarrow$ LNS $\widehat{\mathbf{A}}_j \mathbf{x}_j = \widehat{\mathbf{b}}_j$ ir saderīga.

PIERĀDĪJUMS

1. $(c_1, ..., c_n)$ ir LNS $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ atrisinājums $\Longrightarrow$ $(c_1, ..., c_n)$ apmierina $\forall$ nevienādību

$c_r \leq g_i(c_1, ..., c_n)$ un $h_j(c_1, ..., c_n) \leq c_r$ $\Longrightarrow$

$(c_1, ..., \overset{\uparrow}{c_r}, ..., c_n)$ apmierina $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r = \widehat{\mathbf{b}}_r$

2. $(c_1, ..., \overset{\uparrow}{c_r}, ..., c_n)$ apmierina $\widehat{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_r = \widehat{\mathbf{b}}_r \implies$

$$\max_j h_j(c_1, ..., c_n) \leq \min_i g_i(c_1, ..., c_n).$$

$\implies$ $c_r \in [\max_j h_j(c_1, ..., c_n), \min_i g_i(c_1, ..., c_n)]$ apmierina visus $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ vienādojumus pārveidotus ekvivalentās formās

$$\begin{cases} c_r \leq g_i(c_1, ..., c_n) \\ h_j(c_1, ..., c_n) \leq c_r. \end{cases}$$

(Nevienādības, kas nesatur X_r, abās LNS ir vienādas).

3. Seko no 1. un 2. ■

1.2.3. Algoritms

1. Pēctecīgi izslēgt no dotās LNS visus nezināmos izņemot vienu X_l.

2. Noskaidrot vai pēdējā LNS attiecībā uz X_l ir saderīga.
3. Ja pēdējā LNS ir saderīga, tad pēctecīgi, pretējā virzienā, atrisināt LNS attiecībā uz visiem nezināmajiem.

2. 9.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Atrisināt LNS.

(a) $$\begin{cases} & Y & \geq 1 \\ X & -Y & \geq -2 \\ 2X & +Y & \leq 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} & Y & \geq -1 \\ & Y & \leq 2 \\ -X & +Y & \leq 0 \\ X & -Y & \geq 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} X & +Y & & \leq 1 \\ & Y & -Z & \geq -1 \\ X & & +Z & \geq 3 \end{cases}$$

9.2 Noteikt ar kādām parametru vērtībām LNS ir saderīga:

$$\begin{cases} & Y & \geq 1 \\ X & & \geq 0 \\ X & +aY & \geq b \end{cases}$$