DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt attēlojumu teorijas pamatjēdzienus,
- apgūt permutāciju teorijas pamatjēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var pētīt kopu elementu pārveidojumus un to speciālgadījumus,
- galīgu kopu permutācijas sastāv no cikliem.

Svarīgākie jēdzieni: attēlojums, definīcijas apgabals, elementa attēls, apakškopas attēls, attēlojuma grafs, apvērstais attēlojums, attēlojumu kompozīcija, vienības attēlojums, visur definēts attēlojums, sirjektīvs attēlojums, funkcija (injektīva, sirjektīva, bijektīva), konstants attēlojums, permutācija, permutāciju pieraksta veidi, cikliskais pieraksts, transpozīcija, involūcija.

Svarīgākie fakti un metodes: kompozīcijas asociativitāte, permutācijas sadalījums ciklos.

1. Attēlojumi un funkcijas

1.1. Pamatdefinīcijas

Kopas parasti tiek uzskatītas par fiksētiem, statiskiem objektiem. Lai atļautu kopu un to elementu pārveidojumus, ievieš *attēlojuma* jēdzienu.

Attēlojums ir kāds pārveidojums, kas pārveido, pārstrādā dotās kopas elementus par kādas citas (vai tās pašas) kopas elementiem.

Par *attēlojumu f no kopas A uz kopu B* ($f : A \to B$ vai $A \xrightarrow{f} B$) sauc atbilstības likumu, kas $\forall\ a \in A$ piekārto $f(a) \subseteq B$ (a attēlu attiecībā uz f):

$$\underbrace{a}_{\in A} \mapsto \underbrace{f(a)}_{\subseteq B}.$$

Kopas A elementi, kuru attēli ir netukšas kopas, veido attēlojuma f *definīcijas apgabalu* $D(f) \subseteq A$.

Par kopas A apakškopas A' f-attēlu (apzīmē $f(A')$) sauc kopu

$$\bigcup_{a\in A'} f(a).$$

Par attēlojuma $f : A \to B$ *vērtību kopu* jeb attēlu sauc kopu $f(A) \subseteq B$.

Par kopas B elementa b *inverso attēlu* $f^{-1}(b)$ sauksim kopas A apakškopu

$$\{a \in A \big| b \in f(a)\}.$$

Divus attēlojumus $f : A \to B$ un $g : A \to B$ uzskata par vienādiem $(f = g) \iff \forall\, a \in A : \ f(a) = g(a)$.

1.1. piemērs. Skaitļu funkcijas $(\sin, \log$ u.c.) ir attēlojumi no kādas reālu skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopas uz kādu (iespējams, citu) $\mathbb{R}$ apakškopu.

1.2. Attēlojuma uzdošanas veidi

1.2.1. Attēlu pārskaitīšana

Attēlojumu var uzdot tieši definējot $\forall\ a \in A$ tā attēlu $f(a) \subseteq B$. Šī metode der, ja kopas A un B ir galīgas kopas.

1.2.2. Attēlojuma definējošā īpašība vai algoritms

Attēlojumu var uzdot definējot

- attēlojuma raksturīgu īpašību vai
- attēlu atrašanas algoritmu, izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus.

1.2. piemērs. $f(x) = \sin(x)$.

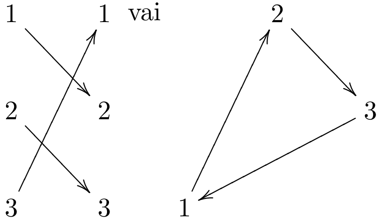
1.2.3. Attēlojuma vizualizācija

Attēlojumu ir lietderīgi vizualizēt *attēlojuma grafa* vai *funkcionālā grafa* veidā:

- atzīmēsim visus kopu A un B elementus,
- katram $a \in A$ zīmē bultiņu no a uz katru $b \in f(a)$.

Ja attēlojums ir definēts no kopas A uz A (*attēlojums sevī* vai *endoattēlojums*), tad pietiek atlikt kopas A elementus vienā eksemplārā.

1.3. piemērs. Kopas $\{1, 2, 3\}$ attēlojumu $f : f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ var uzdot ar šādiem grafiem:



1.3. Operācijas ar attēlojumiem

1.3.1. Apvērstais (inversais) attēlojums

Par attēlojuma $f : A \to B$ *apvērsto attēlojumu* sauc attēlojumu

$$f^{-1} : B \to A,$$
$$b \mapsto f^{-1}(b).$$

f apvērstais attēlojums tiek iegūts no f, izmainot uz pretējo visu bultiņu virzienus attēlojuma f grafā.

$(f^{-1})^{-1} = f$, jo, mainot bultiņu virzienu divas reizes, iegūstam sākotnējo grafu.

1.3.2. Attēlojumu kompozīcija

Par attēlojumu $f : A \to B$ un $g : B \to C$ *kompozīciju* sauc attēlojumu

$$g \circ f : A \to C$$
$$a \mapsto g(f(a)).$$

1.4. piemērs. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $g \circ f(x) = \cos(\sin(x))$.

Līdzīgi var definēt arī vairāku attēlojumu kompozīciju.

Attēlojuma $f : A \to A$ n-kārtīgo kompozīciju $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$ sauc par f *n-to pakāpi* (f^n).

1.1. teorēma. (kompozīcijas asociativitāte). Jebkuriem trīs attēlojumiem

$$f : A \to B,$$
$$g : B \to C,$$
$$h : C \to D$$

izpildās vienādība

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka $\forall\ a \in A$ izpildās vienādība

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

Kopa pierādāmās vienādības kreisajā pusē ir

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Kopa labajā pusē ir

$$(h \circ (g \circ f))(a) = (h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).\blacksquare$$

1.4. Attēlojumu speciālgadījumi

Attēlojumu $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$ sauc par A *vienības attēlojumu.*

Attēlojumu $f : A \to B$ sauc par

- *visur definētu*, ja $D(f) = A$;
- *sirjektīvu (pārklājošu)*, ja $f(A) = B$;
- *funkciju*, ja tas ir
  1. visur definēts un
  2. $\forall\ a \in A$: $|f(a)| = 1$ ($\forall\ a\ f(a)$ ir viens elements).

Funkciju sauc par *injektīvu (iekļaujošu)*, ja jebkuriem dažādiem kopas A elementiem a_1 un a_2 ir dažādi attēli, tas ir,

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

Cita injektivitātes definīcija: $\forall\ b \in f(A)$: $|f^{-1}(b)| = 1$.

Funkciju, kas ir vienlaicīgi sirjektīva un injektīva, sauc par *bijektīvu (savstarpēji viennozīmīgu)* funkciju.

Visplašāk pielietotais attēlojumu tips ir funkcijas. Attēlojumu, kas nav funkcija, bieži sauc par *daudzvērtīgu funkciju*.

$$f : A \longrightarrow B \text{ ir bijektīva funkcija } \Longrightarrow \begin{cases} f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,. \end{cases}$$

Ja attēlojumam $f : A \to B$ izpildās īpašība $f(a) = b$, $\forall a \in A$, kur $b \subseteq B$ ir fiksēta, tad tādu attēlojumu sauksim par *konstantu attēlojumu*.

2. Permutācijas

2.1. Ievads

Par kopas A *permutāciju* sauc bijektīvu funkciju

$$\sigma : A \to A.$$

Visu n elementu kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju kopu apzīmē ar Σ_n.

Permutācijas var uzdot šādos veidos:

- *attēlu saraksts* - $\sigma \rightsquigarrow [\sigma(1), ..., \sigma(n)]$;
- *horizontālais pieraksts* - $\sigma \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- *funkcionālais grafs* ar vienu vai diviem kopas eksemplāriem.

2.1. piemērs. $n = 1$ - $[1]$.
$n = 2$ - $[12]$, $[21]$.
$n = 3$ - $[123]$, $[213]$, $[132]$, $[321]$, $[231]$, $[312]$.

Kopā Σ_n var definēt *kompozīcijas* operāciju. Permutāciju kompozīciju sauksim un apzīmēsim kā reizinājumu.

$\forall$ permutācijai σ $\exists$ *inversā permutācija* σ^{-1}:

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}\,.$$

2.2. Permutācijas sadalījums ciklos

Permutāciju $\sigma : A \to A$ sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un A elementus var sakārtot virknē $(a_1,...,a_n)$ tā, ka $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, $\sigma(a_n) = a_1$.
- vai arī $|A| = 1$ (A vienīgais elements a apmierina vienādību $\sigma(a) = a$).

2.1. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) $\forall$ galīgas kopas A permutācijai σ $\exists$ viennozīmīgi noteikts A sadalījums $A_1, ..., A_m$ tāds, ka $\forall$ i σ kā A_i permutācija ir cikls.

Permutācijas *cikliskais pieraksts:* katra cikla elementus apvieno ar iekavām, katrās iekavās elemento sakārto permutācijas pielietošanas kārtībā:

$$(a, f(a), f^2(a), ...)(b, f(b), f^2(b), ...)(z, f(z), ...).$$

Ciklus ar garumu 1 (*fiksētos punktus*) cikliskajā pierakstā neuzrāda.

2.2. piemērs. Permutāciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ var sadalīt divos ciklos $\{1, 5\} \cup \{2, 4, 3\}$ un apzīmēt kā (15)(243).

Dažas biežāk izmantojamas permutācijas:

- *transpozīcijas* - $\sigma:\ \sigma = (ab)$;
- *involūcijas* - $\sigma:\ \sigma^2 = \mathrm{id}$.

3. 1.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

1.1 Dotas kopas $A = \{1, 2\}$ un $B = \{u, v\}$. Atrodiet

(a) visus visur definētus attēlojumus no A uz B,
(b) visas funkcijas no A uz B,
(c) visas injektīvas funkcijas no A uz B.

1.2 Dotas kopas A un B, $|A| = n$, $|B| = m$. Cik eksistē funkciju no A uz B?

1.3 Kuri no attēlojumiem $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas uzdoti ar formulām $y = \sin(x)$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$, $y^2 = x$, $y = \ln(x)$, $y = 2^x$ ir

(a) visur definēti,
(b) sirjektīvi,
(c) funkcijas,
(d) injektīvas funkcijas,
(e) bijektīvas funkcijas.

1.4 Dotas permutācijas

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Atrast

(a) f^{-1}, g^{-1},

(b) fg, gf, gfg^{-1}.

(c) f, f^2, g, g^2 sadalījumu ciklos.