

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

9.nodarbība

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Matricu algebra	3
2. Lineāru vienādojumu sistēmu risināšana	4
3. Matricu rindu un kolonnu pārveidojumi, rangs, normālā forma, invertēšana	6
4. Determinants	8
5. 9.mājasdarbs	10
5.1. Obligātie uzdevumi	10
5.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi	12

1. Matricu algebra

Svarīgākie jēdzieni:

- matrica,
- matricas elements, rinda, kolonna, galvenā diagonāle,
- rindas/kolonnas matrica, kvadrātveida matrica, nulles matrica, bāzes matrica, vienības matrica, diagonāla matrica, trijstūrveida matrica, simetriska/antisimetriska matrica, bloku matrica,
- rindu/kolonnas izsvīturošana, rindu/kolonnas mainīšana vietām,
- rindas/kolonnas reizināšana ar skaitli,
- rindas/kolonnas pieskaitīšana citai rindai/kolonnai,
- transponēšana,
- matricu summa,
- matricas reizināšana ar skaitli,
- matricu lineāra kombinācija,
- matricu reizināšana,

- invertējama matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: matricu operāciju īpašības.

2. Lineāru vienādojumu sistēmu risināšana

Svarīgākie jēdzieni:

- lineārs vienādojums,
- LVS,
- LVS vispārīgais, matricu un kolonnu pieraksti,
- LVS atrisinājumu kopa,
- LVS elementārie pārveidojumi,
- LVS elementāro pārveidojumu matricas,
- matricas pakāpienveida forma,

- normalizēta pakāpienveida forma,
- galvenās rūtiņas,
- galvenie nezināmie,
- brīvie nezināmie,
- vispārīgais atrisinājums,
- partikulārais atrisinājums,
- algoritms matricas pārveidošanai pakāpienveida formā,
- Gausa metode,
- algoritms matricas pārveidošanai Ermita formā,
- Gausa-Ermita metode.

Svarīgākie fakti un metodes:

- elementāro pārveidojumu īpašības un to realizācija ar matricu reizināšanu,
- elementāro pārveidojumu virkņu īpašības,
- LVS atrisinājumu īpašības.

3. Matricu rindu un kolonnu pārveidojumi, rangs, normālā forma, invertēšana

Svarīgākie jēdzieni:

- kolonnu elementārie pārveidojumi (KEP) un to elementārās matricas,
- matricas normālā forma,
- rindu rangs,
- kolonnu pakāpienveida un Ermita formas,
- kolonnu rangs,
- rangs,
- labā/kreisā inversā matrica,
- kvadrātveida matricas inversā matrica.

Svarīgākie fakti un metodes:

- KEP īpašības,
- algoritms matricas pieveidošanai normālā formā,
- Ermita formas vienīgums,
- REP saglabā rindu rangu,
- Kronekera-Kapelli teorēma,
- EP saglabā abus rangus,
- rangu vienādība,
- normālās formas vienīgums,
- matricas ranga īpašības,
- inverso matricu eksistences kritērijs,
- invertējamu matricu īpašības,
- fundamentālā teorēma par invertējamām matricām,
- kvadrātveida LVS ar invertējamām sistēmas matricām,
- kvadrātveida matricu invertēšanas algoritms.

4. Determinants

Svarīgākie jēdzieni:

- determinants,
- determinanta rekursīvā definīcija (determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas),
- permutācijas paritāte,
- determinanta kombinatoriskā definīcija,
- ap (*algebriskā papildinājuma*) matrica.

Svarīgākie fakti un metodes:

- elementāro matricu determinanti,
- determinanta īpašības,
- mazu izmēru matricu determinantu formulas,
- determinanta aprēķināšana ar triangulācijas metodi,
- determinanta vienīgums,

- determinants ar vienu nenulles elementu rindā,
- determinanta izmaiņa mainot vienu elementu, determinanta definīcijas korektums,
- Laplasa izvirzījums pēc rindas vai kolonnas,
- izvirzījuma ortogonalitātes īpašība,
- inversās matricas atrašana ar ap matricas metodi,
- Krāmera formulu metode,
- determinanta ģeometriskā interpretācija.

5. 9.mājasdarbs

5.1. Obligātie uzdevumi

9.1 (a) Atrodiet matricu reizinājumu

$$\left[X \mid Y \mid 1 \right] \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X \\ Y \\ 1 \end{array} \right].$$

(b) Izsakiet matricu formā

$$\left[X \mid Y \mid 1 \right] \mathbf{A} \left[\begin{array}{c} X \\ Y \\ 1 \end{array} \right] = \mathbf{O}_{1,1}$$

vienādojumu

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

(c) Izsakiet matricu formā patvaļīgu otrās pakāpes vienādojumu

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0.$$

9.2 Atrisināt LVS

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} X_1 & +X_2 & +\dots & & & = 0 \\ X_1 & +X_2 & +X_3 & +\dots & & = 0 \\ & X_2 & +X_3 & +X_4 & +\dots & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & +X_{n-2} & +X_{n-1} & +X_n & = 0 \\ & & & X_{n-1} & +X_n & = 0. \end{array} \right.$$

9.3 Invertēt matricas.

$$(a) \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(b) \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

9.4 Atrast matricu determinantus.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 + a_1 & 1 + a_1^2 & \dots & 1 + a_1^n \\ \hline 1 + a_2 & 1 + a_2^2 & \dots & 1 + a_2^n \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 + a_n & 1 + a_n^2 & \dots & 1 + a_n^n \end{array} \right]; \\
 \\
 \text{(b)} \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ \hline a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a & a^2 & \dots & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

5.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

9.5 Telpā ir dotas 4 taisnes, nekādas 2 nekrustojas un nav paralēlas, nekādas 3 nav koplanāras. Vai vienmēr eksistē kāda taisne, kas krusto visas 4 dotās taisnes.