DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

8.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Normālo sistēmu atrisināmība

1.1. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$.

1. $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = K(\mathbf{A}^T)^{\perp}$.
2. $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T) = K(\mathbf{A})^{\perp}$.

PIERĀDĪJUMS Seko no skalārā reizinājuma īpašībām. Jāveic tieša pārbaude.■

1.2. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$.

1. $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.
2. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ir invertējama $\iff r(\mathbf{A}) = n$.

3. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ir simetriska $n \times n$-matrica.
4. $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathcal{N}ull(\mathbf{A})$.
5. $K(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = K(\mathbf{A}^T)$.

PIERĀDĪJUMS

1.

2.

3. $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

4. $K(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T)$.

$\mathbf{x} \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \iff \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T) = K(\mathbf{A})^\perp$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \in K(\mathbf{A})^\perp \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \in K(\mathbf{A}) \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}).$$

$\mathbf{x} \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{x} \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$

5. $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \Longrightarrow \underbrace{\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^\perp}_{=K(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} = \underbrace{\mathcal{N}ull(\mathbf{A})^\perp}_{=K(\mathbf{A}^T)}$ ■

1.3. teorēma. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline \dots \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R}).$$

1. LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ $\exists$ tieši viens atrisinājums $\Longleftrightarrow$ $r(\mathbf{A}) = n$.
2. LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ir saderīga.

PIERĀDĪJUMS

1. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ir invertējama $\Longrightarrow$ sistēma ir viennozīmīgi atrisināma.

2. Kolonna $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ir $\mathbf{A}^T$ kolonnu lineāra kombinācija $\Longrightarrow$

$\mathbf{A}^T\mathbf{b} \subseteq K(\mathbf{A}^T) = K(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \implies \mathbf{A}^T\mathbf{b} \in Im(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \implies$ LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ir saderīga. ■