DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt Eiklīda telpu teorijas lietojumus LVS tuvinātā risināšanā un funkciju tuvināšanā.

Lekcijas kopsavilkums:

- LVS var risināt tuvināti izmantojot Eiklīda normu kā tuvības mēru,
- funkcijas var tuvināt kā dotas funkciju kopas elementu lineāras kombinācijas izmantojot normu kā tuvības mēru.

Svarīgākie jēdzieni: ortoprojektors, atlikumu vektors, LVS tuvināts atrisinājums, mazāko kvadrātu atrisinājums, LVS normālā sistēma, bezgalīgi dimensionālas ET, Furjē koeficients.

Svarīgākie fakti un metodes: ortoprojektoru pamatīpašības, ortoprojektoru normu īpašības, ortoprojekcijas ekstremālā īpašība, normālās sistēmas atrisinājums kā mazāko kvadrātu atrisinājums, normālo sistēmu atrisināmība, projekciju īpašības bezgalīgi dimensionālās Eiklīda telpās.

1. Eiklīda telpu teorijas lietojumi

1.1. Palīgrezultāti

1.1.1. Projekcijas uz ortogonāli papildinošām apakštelpām

1.1. teorēma. E - ET, $V \leq E$.

1. $E = V \oplus V^{\perp}$.
2. $\forall\ \mathbf{t} \in E : \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{kur } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V^{\perp} \\ < \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0 \\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ir noteikti viennozīmīgi.} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\} - V \text{ bāze} \\ \{\mathbf{e}_{l+1}, ..., \mathbf{e}_n\} - V^{\perp} \text{ bāze} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} = \sum_{i=l+1}^{n} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \end{cases}$

PIERĀDĪJUMS
1. Tika pierādīts agrāk.

2. Tika pierādīts agrāk. Nosacījums $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0$ seko no V un $V^{\perp}$ ortogonalitātes.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = proj_V(\mathbf{t}) \in V \\ \mathbf{w} = proj_{V^\perp}(\mathbf{t}) \in V^\perp \end{cases} \Longrightarrow < \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0.$$

3. Tika pierādīts agrāk. ■

1.1.2. Ortoprojektori

E - ET, $V \subseteq E$.

$V^\perp$ ir noteikta viennozīmīgi $\Longrightarrow$ $proj_V(\mathbf{t})$ arī ir noteikta viennozīmīgi $\forall$ $\mathbf{t}$, ja papildinošā apakštelpa ir $V^\perp$.

Definēsim *ortoprojekciju* $p_V : E \longrightarrow E$ kā projekciju uz V, ja papildinošā apakštelpa ir $V^\perp$:

$$\forall\ \mathbf{t} \in E\ p_V(\mathbf{t}) = \mathbf{v} \iff \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{kur} \begin{cases} \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{w} \in V^\perp. \end{cases}$$

1.1. piezīme. No iepriekšējās teorēmas seko, ka

$$\mathbf{t} = p_V(\mathbf{t}) + p_{V^\perp}(\mathbf{t}).$$

1.2. teorēma. E - ET, $V \leq E$.

1. $p_V \in \mathcal{E}nd(E)$.
2. $Im(p_V) = V$.
3. $Ker(p_V) = V^{\perp}$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} p_V(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \\ p_V(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \end{cases} \Longrightarrow p_V(\mathbf{t}) + p_V(\mathbf{u}) =$

$\sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i =$

$\sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i + < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i =$

$\sum_{i=1}^{l} \Big(< \mathbf{t}|\mathbf{e}_i > + < \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \Big)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{l} < \mathbf{t} + \mathbf{u}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i =$

$p_V(\mathbf{t} + \mathbf{u})$.

Reizināšana ar λ tiek pārbaudīta līdzīgi.

2. $Im(p_V) \leq \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle = V$.

$$\forall\ \mathbf{v} \in V:\ p_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \implies Im(p_V) = V.$$

3. $\mathbf{w} \in Ker(p_V) \iff <\mathbf{w}|\mathbf{e}_i>= 0,\ \forall\ i \iff \mathbf{w} \in V^\perp.$ ■

1.3. teorēma. E - ET, $V \le E$. Tad

$$||\mathbf{t}||^2 = ||p_V(\mathbf{t})||^2 + ||p_{V^\perp}(\mathbf{t})||^2.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\mathbf{v} = p_V(\mathbf{t})$, $\mathbf{w} = p_{V^\perp}(\mathbf{t})$.

$$||\mathbf{t}||^2 = ||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v}+\mathbf{w}|\mathbf{v}+\mathbf{w} >=$$
$$<\mathbf{v}|\mathbf{v}> +2\underbrace{<\mathbf{v}|\mathbf{w}>}_{=0} + <\mathbf{w}|\mathbf{w}>= ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2.$$ ■

1.4. teorēma. E - ET, $V \le E$. $\forall\ \mathbf{t} \in E$:

1. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| \le ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||$, $\forall\ \mathbf{v} \in V$;
2. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| = ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||$, kur $\mathbf{v} \in V \iff \mathbf{v} = p_V(\mathbf{t})$.
3. $||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})|| = \min_{\mathbf{v}\in V} ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||$.

PIERĀDĪJUMS

$$\underbrace{\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})}_{\in V^\perp} = \mathbf{t} - p_V(\mathbf{t}) \pm \mathbf{v} = (\mathbf{t} - \mathbf{v}) + \underbrace{(\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}))}_{\in V} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{t} - \mathbf{v} = (\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})) - (\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t})) \Longrightarrow$$

$$||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2 + ||\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t})||^2 \Longrightarrow$$

$$\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}) = 0 \iff ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2$$

$$\mathbf{v} - p_V(\mathbf{t}) \neq 0 \iff ||\mathbf{t} - \mathbf{v}||^2 < ||\mathbf{t} - p_V(\mathbf{t})||^2. \blacksquare$$

1.1. piemērs. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

1.2. Lineāru vienādojumu sistēmu tuvināta risināšana

1.2.1. Motivējošs piemērs

1.2. piemērs. Ir doti vairāki mērījumu pāri $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Ir hipotēze, ka x_i un y_i saista lineāra sakarība. Var uzdot šādus jautājumus:

1. vai eksistē tāda lineāra funkcija

$$f(x) = y = ax + b :$$

$$y_i = f(x_i) = ax_i + b, \ \forall \ i?$$

   Iegūsim LVS

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ... \\ ax_n + b = y_n. \end{cases}$$

   Ja $n > 2$, tad visdrīzāk (reāla eksperimenta gadījumā) LVS nebūs atrisinājumu - vienādojumu (nosacījumu) skaits ir lielāks nekā nezināmo skaits.

2. vai var atrisināt doto LVS *tuvināti:* atrast tādus a, b, lai vienādības kopumā izpildītos pēc iespējas precīzāk (kaut arī varbūt neviena vienādība neizpildās precīzi),

   ğeometriski tas nozīmē novilkt plaknē taisni tā, lai tā "vislabāk" atbilstu doto punktu (x_i, y_i) kopai.

Var meklēt tādu $f(x) = ax + b$, lai $\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2$ būtu minimāla.

1.2.2. Problēmas nostādne un atrisinājums

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$.

$\forall\ \mathbf{y} \in \mathcal{M}at(m, 1, \mathbb{R})$ definēsim *atlikumu vektoru* $\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ay}$.

1.2. piezīme. Ja $\mathbf{x}$ ir LVS (precīzs) atrisinājums, tad $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Risinot LVS tuvināti, var pieprasīt, lai atlikumu vektora norma (kļūda) ir minimāla.

Uzdevums: atrast $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}at(m,1,\mathbb{R})$: $||\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0||$ ir minimāla :

$$||\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)|| = ||\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0|| = \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{M}at(m,1,\mathbb{R})} ||\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}||.$$

Šādu $\mathbf{x}_0$ sauc par *mazāko kvadrātu atrisinājumu.*

Izmantosim LVS kolonnu ainu. $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1|...|\mathbf{A}_n]$.

Tad $\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{A}_1 + ... + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \Longrightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{A}_i$.

1.5. teorēma. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$, $V = \langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n \rangle$,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n,1,\mathbb{R}).$$

Tad $\mathbf{x}_0$ minimizē $||\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}|| \iff p_V(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{A}_i$.

PIERĀDĪJUMS Seko no iepriekšējās teorēmas. ■

1.2.3. Normālās sistēmas

1.6. teorēma. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R}).$$

$\mathbf{x}_0$ minimizē $||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}|| \iff \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

PIERĀDĪJUMS $V = K(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n \rangle$.

No iepriekšējās teorēmas:

$\mathbf{x}_0$ minimizē $||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}|| \iff p_V(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \iff$
$\mathbf{b} = p_V(\mathbf{b}) + p_{V^\perp}(\mathbf{b}) \iff \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + p_{V^\perp}(\mathbf{b}) \iff$
$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \in V^\perp \iff \forall\, i : < \mathbf{A}_i | \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 >= 0 \iff$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = 0 \\ ... \\ \mathbf{A}_n^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases} \iff \mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \iff$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0$. ■

LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ sauc par *normālo LVS* attiecībā uz LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1.3. piemērs. Taisnes $y = ax+b$ novilkšana caur vairākiem punktiem (x_i, y_i) plaknē. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} x_1 & 1 \\ \hline x_2 & 1 \\ \hline ... & ... \\ \hline x_n & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline ... \\ \hline y_n \end{array}\right]$.

1.2.4. Normālo sistēmu atrisināmība - bez pierādījumiem

1.7. teorēma. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ - $m \times n$ LVS virs $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(n, 1, \mathbb{R}).$$

1. LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ $\exists$ tieši viens atrisinājums $\iff r(\mathbf{A}) = n$.
2. LVS $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ir saderīga.

PIERĀDĪJUMS Skatīt papildmateriālu. ■

1.4. piemērs.

1.3. Funkciju aproksimācijas uzdevums

1.3.1. Motivācija

Tuvinātajos aprēķinos var sastapties ar šādu problēmu -

- ir dota funkcija f, kuras vērtības ir grūti aprēķināmas, piemēram,
  - transcendentāla funkcija,
  - funkcija, kura ir definēta netiešā veidā,
  - funkcija, kura ir definēta ar sarežģīta algoritma palīdzību,
  - funkcija, kuras vērtības ir zināmas tikai mazā definīcijas apgabala apakškopā,
- ir dota "vienkāršāku" funkciju kopa $\{g_1, .., g_n, ...\}$, piemēram,
  - monomi,

– polinomi,
– racionālas funkcijas,
– trigonometriskas funkcijas,
– dota diferenciālvienādojuma atrisinājumi,
– ar noteiktu algoritmu palīdzību definētas funkcijas,

- kā atrast tādu funkciju $g = \sum_i g_i$, lai f un g būtu "pēc iespējas tuvākas" vai, lai $f - g$ būtu "pēc iespējas mazāka" funkcija?

Ja funkcijas pieder kādai ET E, tad problēmu var mēģināt risināt ar ortoprojekciju palīdzību un tuvību mērīt izmantojot Eiklīda normu.

1.3.2. Problēmas risināšana ar ortoprojekciju palīdzību

E - funkciju ET (parasti bezgalīgi dimensionāla), $f \in E$,

$\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, ...\} \subseteq E$ - ortonormēta kopa, ne obligāti galīga.

$\forall\ f \in E$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ definēsim *Furjē koefiecientus*

$$f_n =< f|\varphi_{in} > .$$

Apzīmēsim $\Phi_n = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$, $\Psi_n = \langle \Phi_n \rangle$.

1.5. piemērs. $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $< f|g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$,
$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, ...\}$.

Furjē koeficienti -

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)dt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)dt.$$

1.8. teorēma. E - bezgalīgi dimensionāla ET, $f \in E$.
$\Phi = \{\varphi_1, ...\} \subseteq E$ - ortonormēta kopa,
$\Psi_n = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$,
f_n - f Furjē koeficienti attiecībā uz Φ_n.

Tad

1. $||f - p_{\Psi_n}(f)|| = \min_{g \in \Psi_n} ||f - g||$,
2. $p_{\Psi_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pierādīts iepriekšējā teorēmā.

2. Pierādīts agrāk. ■

2. 8.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Atrast ET E (ar standarta skalāro reizinājumu) elementa $\mathbf{t}$ ortoprojekcijas uz V un $V^{\perp}$.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$;

(b) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$;

(c) $E = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $V = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$;

8.2 Atrisiniet dotajām LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atbilstošās normālās sistēmas un atrodiet atrisinājumu atlikuma normu. Ja atrisinājums nav noteikts viennozīmīgi, mēģiniet atrast atrisinājumus ar minimālo normu.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 5 & 1 \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ \hline 4 \\ \hline 7 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & -1 \\ \hline -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline -2 \end{bmatrix}$.

8.3 $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$,
$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, ...\}$. Atrast Furjē koeficientus funkcijai f.

(a) $f(x) = \sin 2x$;
(b) $f(x) = 1$.
(c) $f(x) = x$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.4 Atrodiet bezgalīgas ortonormētas polinomiālu funkciju kopas piemēru, ja skalārais reizinājums ir $< f|g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.