DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Eiklīda telpu īpašības **4**
1.1. Palīgrezultāti 4
1.1.1. Elementu koordinātes attiecībā uz ortonormētu bāzi 4
1.1.2. Matricu pārnešana skalārajā reizinājumā 5
1.2. Ortogonālie papildinājumi 6
1.2.1. Pamatfakti 6
1.2.2. Ortogonālās papildinošās apakštelpas 7
1.3. Izometriskie lineārie attēlojumi 8
1.4. Ortogonālās matricas 11
1.4.1. Pamatfakti 11
1.4.2. QR faktorizācija 14

2. 7.mājasdarbs **17**
2.1. Obligātie uzdevumi 17
2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 19

Lekcijas mērķis:

- apgūt Eiklīda telpu īpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt un pētīt ET apakškopas, kas satur ortogonālus elementos attiecībā uz doto kopu,
- var definēt un pētīt matricas - *ortogonālas matricas*, kas atbilst skalārus reizinājumus saglabājošiem LA.

Svarīgākie jēdzieni: ortogonālais papildinājums, ortogonālā papildinošā apakštelpa, izometrija, ortogonāla matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: elementa koordinātes un norma attiecībā uz ortonormētu bāzi, matricu pārnešana skalārajā reizinājumā attiecībā uz ortonormētu bāzi, ortogonālā papildinājuma īpašības, ortogonālās papildinošās apakštelpas īpašības, izometrijas eksistence vienādas dimensijas ET, ortogonālo matricu īpašības, QR faktorizācija.

1. Eiklīda telpu īpašības

1.1. Palīgrezultāti

1.1.1. Elementu koordinātes attiecībā uz ortonormētu bāzi

1.1. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET, $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - ortonormēta bāze. Tad

1. $\forall\ \mathbf{v} \in E :\ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i;$
2. $\forall\ \mathbf{v} \in E :\ ||\mathbf{v}||^2 = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i >^2$ (Parsevāla identitāte).

PIERĀDĪJUMS

1. Apzīmēsim $\widetilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$.

Redzam, ka $\forall\ i :< \mathbf{v}|\mathbf{e}_i >=< \widetilde{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_i > \Longrightarrow\ \forall\ i :< \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_i >= 0$

$\Longrightarrow$ izsakot $\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}$ kā $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ lineāru kombināciju, visi koeficienti ir 0 $\Longrightarrow\ \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \Longrightarrow\ \mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}}$.

2. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \Longrightarrow$

$||\mathbf{v}||^2 =< \left(\sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i \right) | \left(\sum_{j=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_j > \mathbf{e}_j \right) >=$
$\sum_{i=1}^{n} < \mathbf{v}|\mathbf{e}_i >^2$ (tas seko no skalārā reizinājuma linearitātes un bāzes ortonormalitātes, jāatver iekavas). ■

1.1.2. Matricu pārnešana skalārajā reizinājumā

1.2. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET. $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - ortonormēta bāze. Tad

1. $< \mathbf{v}|\mathbf{A}\mathbf{w} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{v}|\mathbf{w} >$.
2. $< \mathbf{A}\mathbf{v}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{A}^T\mathbf{w} >$.

PIERĀDĪJUMS Skalārā reizinājuma matrica ir $\mathbf{E}$.

1. $< \mathbf{v}|\mathbf{A}\mathbf{w} >= \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{w} = (\mathbf{A}^T\mathbf{v})^T\mathbf{w} =< \mathbf{A}^T\mathbf{v}|\mathbf{w} >$.

2. Līdzīgi.■

1.2. Ortogonālie papildinājumi

1.2.1. Pamatfakti

E - ET, $S \subseteq E$.

$S^{\perp} \subseteq E$ sauc par S *ortogonālo papildinājumu*, ja

$$\forall\, \mathbf{s} \in S, \forall\, \mathbf{t} \in S^{\perp} : < \mathbf{s}|\mathbf{t} >= 0.$$

1.1. piemērs. $E = \mathbb{R}^2$, $S = \{\mathbf{v}\}$.

1.3. teorēma. E - ET.

1. $S^{\perp} = E \implies S = \{\mathbf{0}\}$.
2. $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$.

PIERĀDĪJUMS

1. $S \neq \{\mathbf{0}\} \implies \exists\, \mathbf{v} \neq 0 : < \underbrace{\mathbf{v}}_{\in S} | \underbrace{\mathbf{v}}_{\in E} >= \mathbf{0}$ - pretruna.

2. $\mathbf{v} \in S^{\perp} \implies < \mathbf{v}|\mathbf{s} >= 0, \forall\, \mathbf{s} \in S \implies$

$$< \mathbf{v} | \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i \right) >= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < \mathbf{v} | \mathbf{s}_i >= 0 \implies \mathbf{v} \in \langle S \rangle^{\perp}.$$

$$\mathbf{v} \in \langle S \rangle^{\perp} \implies < \mathbf{v} | \mathbf{s} >= 0, \forall \ \mathbf{s} \in S \implies \mathbf{v} \in S^{\perp}. \ \blacksquare$$

1.2.2. Ortogonālās papildinošās apakštelpas

1.4. teorēma. E - galīgi dimensionāla ET.

1. $V \leq E \implies V^{\perp} \leq E.$
2. $V \leq W \implies W^{\perp} \leq V^{\perp}.$
3. $E = V \oplus V^{\perp}.$
4. $\dim E = \dim V + \dim V^{\perp}$
5. $(V^{\perp})^{\perp} = V.$

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\perp} \implies \begin{cases} < \mathbf{v} | \mathbf{w} >= 0 \\ < \mathbf{v} | \mathbf{w}' >= 0, \forall \ \mathbf{v} \in V \end{cases} \implies$
$< \mathbf{v} | \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}' >= 0 \implies \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}' \in V^{\perp} \implies V^{\perp} \leq E.$

2. $\mathbf{t} \in W^{\perp} \Longrightarrow <\mathbf{t}|\underbrace{\mathbf{v}}_{\in V \subseteq W}>=0 \Longrightarrow \mathbf{t} \in V^{\perp} \Longrightarrow W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.

3. $\mathbf{t} \in V \cap V^{\perp} \Longrightarrow <\mathbf{t}|\mathbf{t}>=0 \Longrightarrow \mathbf{t}=0$.

4. Seko no papildinošo apakštelpu īpašībām.

5. $\mathbf{v} \in V \Longrightarrow <\mathbf{v}|\mathbf{w}>=0,\ \forall\ \mathbf{w} \in V^{\perp} \Longrightarrow \mathbf{v} \in (V^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow V \leq (V^{\perp})^{\perp}$.

$$\begin{cases} \dim E = \dim V + \dim V^{\perp} \\ \dim E = \dim (V^{\perp})^{\perp} + \dim V^{\perp} \end{cases} \Longrightarrow \dim V = \dim (V^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow$$

$V = (V^{\perp})^{\perp}$. ■

1.3. Izometriskie lineārie attēlojumi

E, E' - ET. LI $f : E \longrightarrow E'$ sauc par *izometriju*, ja

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E : <\mathbf{v}|\mathbf{w}>=<f(\mathbf{v})|f(\mathbf{w})> .$$

1.1. piezīme. Izometrija saglabā leņķus un normu:
$||\mathbf{v}||^2 =< \mathbf{v}|\mathbf{v} >=< f(\mathbf{v})|f(\mathbf{v}) >= ||f(\mathbf{v})||.$

1.2. piemērs. Rotācija, simetrija.

1.5. teorēma. *E, E' - ET, $\dim E = \dim E' = n$. Tad $\exists$ izometrija $f : E \longrightarrow E'$.*

PIERĀDĪJUMS Izvēlēsimies E un E' ortonormētas bāzes $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$.

Definēsim

$$f_0 : \mathcal{B} \longrightarrow E'$$

$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \forall\ i$$

un turpināsim to līdz lineāram attēlojumam

$$f : E \longrightarrow E'$$

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}'_i.$$

$$< \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \right) | \left(\sum_{i=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j \right) >= \sum_{i,j} v_i w_j < \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j >=$$
$$\sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{< \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j >}_{=\delta_{ij}} = \sum_i v_i w_j.$$

$$< f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \right) | f\left(\sum_{i=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j \right) >= \sum_{i,j} v_i w_j < f(\mathbf{e}_i) | f(\mathbf{e}_j) >=$$

$$\sum_{i,j} v_i w_j \underbrace{< \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j >}_{=\delta_{ij}} = \sum_i v_i w_j. \blacksquare$$

1.2. piezīme. F - izometrijas matrica attiecībā uz kādu bāzi $\Longrightarrow$ $\mathbf{SFS}^{-1}$ arī ir izometrijas matrica.

1.4. Ortogonālās matricas

1.4.1. Pamatfakti

Lietderīgi definēt šādu apzīmējumu

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

1.6. teorēma. E - ET, $\dim E = n$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$ Tad zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\mathbf{A}$ ir izometrijas matrica.
2. $\mathbf{A}$ ir pārejas matrica starp divām ortonormētām bāzēm.
3. $\mathbf{A}$ rindas veido ortonormētu $\mathbb{R}^n$ apakškopu attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.
4. $\mathbf{A}$ kolonnas veido ortonormētu $\mathbb{R}^n$ apakškopu attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.
5. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ($\mathbf{A}$ ir *ortogonāla* matrica).

PIERĀDĪJUMS

2. $\iff$ 3. $\iff$ 4. $\iff$ 5.

$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ un $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - ortonormētas bāzes.

Izsakot $\mathcal{B}'$ elementus kā $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas -

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{l=1}^{n} a_{li}\mathbf{e}_l,$$

iegūsim pārejas matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$.

$\underbrace{< \mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j >}_{=\delta_{ij}} =< \sum_{l=1}^n a_{li}\mathbf{e}_l| \sum_{m=1}^n a_{mj}\mathbf{e}_m >=$

$\sum_{l,m} a_{li}a_{mj} < \mathbf{e}_l|\mathbf{e}_m >= \sum_{l,m} a_{li}a_{mj}\delta_{lm} = \sum_{l=1}^n a_{li}a_{lj} = \delta_{ij}$

$\iff$ $\mathbf{A}$ kolonnas ir ortonormēta kopa.

$\iff$ $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$

$\iff$ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

$\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E} \implies \sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj} = \delta_{ij}$

$\iff$ **A** rindas ir ortonormēta kopa.

Strādāsim ortonormētajā bāzē $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.

$\underline{5. \implies 1.}$

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \implies < \mathbf{Av}|\mathbf{Aw} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{w} > \implies$ **A** ir izometrija attiecībā uz $\mathcal{B} \implies$ **A** ir izometrija attiecībā uz $\forall$ bāzi.

$\underline{1. \implies 5.}$

$< \mathbf{Av}|\mathbf{Aw} >=< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} >=< \mathbf{v}|\mathbf{w} > \implies$

$< \mathbf{A}^T\mathbf{Av}|\mathbf{w} > - < \mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0 \implies < (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{v}|\mathbf{w} >= 0 \implies$

$\forall\ i, j : < (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j >= 0.$

$\forall\ i$ izteiksim $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i$ $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas veidā:

$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} < (\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j > \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \implies$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O} \implies \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \blacksquare$$

1.3. piezīme. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \implies \mathbf{A}\mathbf{A}^T = 1 \implies |\det \mathbf{A}| = 1.$

Visas ortogonālas $n \times n$ matricas veido *ortogonālo grupu* $O(n)$:

- $\begin{cases} \mathbf{A} \in O(n) \\ \mathbf{A} \in O(n) \end{cases} \implies \mathbf{AB} \in O(n);$
- $\mathbf{E}_n \in O(n);$
- $\mathbf{A} \in O(n) \implies \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \in O(n).$

Visas matricas $\mathbf{A} \in O(n)$: $\det \mathbf{A} = 1$ veido *speciālo ortogonālo grupu* $SO(n) \subseteq O(n)$.

1.4.2. QR faktorizācija

1.7. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, $rk(\mathbf{A}) = n$. Tad

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \text{ kur}$$

- $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, $\mathbf{Q}$ kolonnas ir ortonormētas attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu;
- $\mathbf{R}$ - augšēji trijstūrveida matrica ar nenulles elementiem uz galvenās diagonāles.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 | ... | \mathbf{A}_n]$.

Uzskatīsim $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ par ET elementiem,
pielietosim Grama-Šmita algoritmu,
iegūsim ortonormētus elementus $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_n$:

- $\langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_i \rangle = \langle \mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_i \rangle$,
- $\begin{cases} \mathbf{Q}_1 = t_{11}\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{Q}_2 = t_{12}\mathbf{A}_1 + t_{22}\mathbf{A}_2 \\ ... \\ \mathbf{Q}_n = t_{1n}\mathbf{A}_1 + ... + t_{nn}\mathbf{A}_n. \end{cases}$

Apzīmēsim $\begin{cases} \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_n] \\ \mathbf{T} = [t_{ij}]_{n,n} \end{cases} \implies \mathbf{Q} = \mathbf{AT}.$

$\langle \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_i \rangle = \langle \mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_i \rangle \implies \forall\, i: \; t_{ii} \neq 0 \implies \exists\, \mathbf{T}^{-1} \implies$
$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \underbrace{\mathbf{T}^{-1}}_{=\mathbf{R}} = \mathbf{QR}.$

$\mathbf{T}$ augšēji trijstūrveida $\implies$ $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}$ - augšēji trijstūrveida.

2. 7.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Dota ET $\mathbb{R}^n$ ar skalārā reizinājuma matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz standarta bāzi. Atrast kādu ortonormētu bāzi un dotā elementa v koordinātes attiecībā uz šo bāzi. Pārbaudīt Beseļa vienādību.

(a) $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 5 \end{array}\right]$.

(b) $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \end{array}\right]$.

7.2 $E = \mathbb{R}[X]_2$, $< p|q >= \int_0^1 p(t)q(t)tdt$. Atrast kādu ortonormētu bāzi ET E.

7.3 Atrast Eiklīda telpas E apakštelpas V ortogonālā papildinājuma bāzi.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, standarta skalārais reizinājums, $V = \langle(2,3)\rangle$.

(b) $E = \mathbb{R}^3$, standarta skalārais reizinājums, $V = \langle(-1,2,1)\rangle$.

(c) $E = \mathbb{R}^{34}$, standarta skalārais reizinājums,
$V = \langle (1, 2, 1, 2), (3, -1, 4, 1) \rangle$.

7.4 Atrast Eiklīda telpas E apakštelpas V ortogonālā papildinājuma bāzi.

(a) $E = \mathbb{R}[X]_2$, $< p|q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$, $V = \langle 1 + X \rangle$.

(b) $E = \mathbb{R}^3$, standarta skalārais reizinājums, $V = Ker(\mathbf{A})$, kur

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

7.5 Atrast doto matricu QR faktorizācijas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

(c) $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline -1 & 4 \end{array}\right]$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.6 E - ET, $V, W \leq E$. Pierādīt, ka

(a) $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$;

(b) $(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

7.7 Atrast (bezgalīgu) ortonormētu kopu ET $\mathbb{R}[X]$ ar skalāro reizinājumu

$$< p|q >= \int_{-1}^{1} \frac{p(t)q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$