DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt bilineāro formu un reālā skalārā reizinājuma teorijas pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- lineārajās telpās var apskatīt divu argumentu operācijas, kas vispārina klasisko skalāro reizinājumu.

Svarīgākie jēdzieni: polilineārs attēlojums, polilineāra forma, bilineāra forma, simetriska forma, bilineāras formas matrica, skalārais reizinājums, Eiklīda telpa, ortogonāli elementi, Eiklīda norma, ortonormēta kopa, ortonormēta bāze.

Svarīgākie fakti un metodes: bilineāra forma ir noteikta ar tās darbību uz bāzes elementiem, bilineāras matricas maiņa pārejot uz jaunu bāzi, Eiklīda normas īpašības, ortogonālas kopas lineāra neatkarība, Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms, ortonormētas kopas turpināšana līdz ortonormētai bāzei, elementa koordinātes un norma kā funkcija no ortonormētas bāzes.

1. Bilineārās formas

1.1. Motivācija - standarta skalārais reizinājums

1.1.1. Reālais skalārais reizinājums

$L = \mathbb{R}^n$. Uzskatīsim L elementus par kolonnu matricām. Definēsim *(standarta, kanonisko) skalāro reizinājumu:*

$$\rho : L \times L \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{w}.$$

Koordinātu terminos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} v_1 \\ \hline \ldots \\ \hline v_n \end{array} \right] \\ \mathbf{w} = \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \hline \ldots \\ \hline w_n \end{array} \right] \end{array} \right. \Longrightarrow \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Parasti apzīmēsim $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ar $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$.

$\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par *ortogonāliem*, ja $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = 0$. Ortogonalitātes attiecību apzīmē ar $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

1.1. piemērs. $\mathbf{v} = [2, 3, 4]^T$, $\mathbf{w} = [2, -3, 0]^T$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = -5$.
$(1, 1, 1) \perp (1, 1, -2)$.

Par $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *Eiklīda normu* $|\mathbf{v}|$ sauc

$$\sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})} = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}.$$

Ja $n = 1$, tad norma sakrīt ar skaitļa absolūto vērtību:
$\mathbf{v} = (v_1) \implies |\mathbf{v}| = \sqrt{v^2} = |v|$.

Par *Eiklīda attālumu* $d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ starp $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|$.

1.2. piemērs. $|(2, 3, 4)^T| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$.

1.1. teorēma.

1. $(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\mathbf{w}|\mathbf{v})$.
2. $(\mathbf{v}|\lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \mu(\mathbf{v}|\mathbf{z})$.

PIERĀDĪJUMS Būtu jābūt zināmam no analītiskās ģeometrijas kursa. ■

1.2. teorēma.

1. $|\mathbf{v}| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$.
2. $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$.

PIERĀDĪJUMS

1. $|\mathbf{v}| = 0 \iff \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = 0 \iff \forall\ i\ v_i = 0 \implies \mathbf{v} = 0$.

2. Trijstūra nevienādība. ■

1.1.2. Reālā skalārā reizinājuma lietojumi

Ģeometrija

- vektora (nogriežņa) garuma aprēķināšana;
- vektoru (nogriežņu) ortogonalitātes noteikšana;
- vektoru (nogriežņu) paralelitātes noteikšana;
- leņķa atrašana starp vektoriem.

Lineāru vienādojumu sistēmas

LVS $\begin{cases} a_1 x_1 + ... + a_{1n} x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$ var interpretēt kā sistēmu

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1 | \mathbf{x}) = b_1 \\ ... \\ (\mathbf{a}_m | \mathbf{x}) = b_m \end{cases}, \text{ kur } \begin{cases} \mathbf{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{in}) \\ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Statistika

Daudzparametru gadījuma lielumu korelācija.

1.2. Vispārīgas bilineāras formas

1.2.1. Polilineārie attēlojumi un formas

$L_1, ..., L_m, V$ - k-lineāras telpas. Funkciju

$$f : L_1 \times ... \times L_m \longrightarrow V,$$

$$(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m) \mapsto f(\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m),$$

sauc par *polilineāru attēlojumu*, ja tas ir LA attiecībā uz katru argumentu, pārējos argumentus fiksējot.

Ja $L_1 = ... = L_m$ un $V = k$, tad polilineāru attēlojumu sauc par *polilineāru formu.*

Ja $m = 2$, tad polilineāru formu sauc par *bilineāru formu.* Visu L bilineāru formu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{B}il(L)$.

Citiem vārdiem sakot, bilineāra forma ir funkcija $f : L \times L \longrightarrow k$, kas $\forall$ $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\} \subset L$ apmierina šādas īpašības:

- $f(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ (linearitāte pēc pirmā argumenta)
- $f(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \mu f(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ (linearitāte pēc otrā argumenta).

Bilineāru formu f sauc par:

- simetrisku, ja $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
- antisimetrisku, ja $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

1.3. piemērs. Nulles bilineārā forma $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$.
Skalārais reizinājums.
$f(p, q) = \int_a^b p(t)q(t)dt$.

1.2.2. Bilineāro formu pamatīpašības

1.3. teorēma. Bilineārā forma ir viennozīmīgi definēta ar tās darbību uz jebkuras bāzes elementu pāriem.

PIERĀDĪJUMS L - k-lineāra telpa, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $f \in \mathcal{B}il(L)$.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{e}_j \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f\Big(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{e}_j\Big) =$$

$$= \sum_{i,j} v_i w_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \blacksquare$$

Galīgi dimensionālas L gadījumā matricu $\mathbf{F} = [f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]_{n,n}$ sauc par *bilineārās formas f matricu (attiecībā uz doto bāzi).*

1.1. piezīme. No teorēmas pierādījuma seko bilineārās formas vērtības aprēķināšanas formula, ja ir zināma matrica un elementu koordinātes:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{w},$$

kur $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ nozīmē gan elementus, gan to koordinātu kolonnas.

1.4. piemērs. Standarta skalārajam reizinājumam $\mathbf{F} = \mathbf{E}$.

1.2.3. Bilineāras formas matricas maiņa

L - galīgi dimensionāla k-lineāra telpa, pieņemsim, ka ir izvēlētas divas bāzes - "sākotnējā" ("vecā")un "mainītā" ("jaunā"):

$$\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \mathcal{B}'_L = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}.$$

Apzīmēsim pārejas matricas ar $\mathbf{S}$ un $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c}, \\ \mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}' = \mathbf{A}\mathbf{c}', \end{cases}$$

kur $\mathbf{c}$ un $\mathbf{c}'$ ir elementa $\mathbf{l}$ koordinātu kolonna sākotnējā un mainītajā bāzē. Ar $\mathbf{A}$ palīdzību mainītā bāze tiek izteikta izmantojot sākotnējo bāzi.

Dota $f \in \mathcal{B}il(L)$, tās matrica attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ ir $\mathbf{F}$.

Atradīsim f matricu $\mathbf{F}'$ attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}'_L$:

- $\mathbf{v} \sim \mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}'_L$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{v} \sim \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}'$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$,
- $\mathbf{c}^T = (\mathbf{A}\mathbf{c}')^T = \mathbf{c}'^T\mathbf{A}^T$,

- $\begin{cases} \mathbf{v} \sim \mathbf{c}' \\ \mathbf{w} \sim \mathbf{d}' \end{cases} \Longrightarrow f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{F}\mathbf{d} = \underbrace{\mathbf{c}'^T\mathbf{A}^T}_{=\mathbf{c}^T}\mathbf{F}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{d}'}_{=\mathbf{d}} = \mathbf{c}'^T\underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}}_{=\mathbf{F}'}\mathbf{d}'$

Seko, ka $\mathbf{F}' = \mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}$.

1.5. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right], \mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & -1 \end{array}\right], \mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ \hline 2 & -1 \end{array}\right].$

1.2. piezīme. Tā kā reizināšana ar invertējamu matricu saglabā rangu, tad seko, ka bilineāras formas matricas rangs nav atkarīgs no bāzes. To sauc par *bilineāras formas rangu.*

2. Vispārīgais reālais skalārais reizinājums

2.1. Ievads

2.1.1. Pamatfakti

E - $\mathbb{R}$-lineāra telpa. Telpā E ir dota *skalāra reizinājuma funkcija (simetriska nedeğenerēta bilineāra forma)*

$$L \times L \to \mathbb{R},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto < \mathbf{v}|\mathbf{w} >,$$

ja tā apmierina šādas īpašības:

- $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = < \mathbf{v}|\mathbf{w} >$ ir bilineāra simetriska forma,
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > \geq 0$ (normas nenegativitāte);
- $< \mathbf{v}|\mathbf{v} > = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (normas nedeğenerētība).

$\mathbb{R}$-LT E ar tajā uzdotu skalāro reizinājumu sauc par *Eiklīda telpu (ET)*.

2.1. piemērs. Standarta skalārais reizinājums, matrica - **E**.

$E = \mathbb{R}^n$, $<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= \sum_{i=1}^{n} c_i v_i w_i$, kur $c_i > 0$.

$E = \mathbb{R}[X]_n$, $<f|g>= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)g(x_i)$, kur $x_1, ..., x_{n+1}$ - dažādi reāli skaitļi.

$E = \mathcal{C}[a,b]$ - nepārtrauktas funkcijas, $<f|g>= \int_a^b f(t)g(t)dt$.

$\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$ sauc par *ortogonāliem* ($\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$), ja $<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= 0$.

2.2. piemērs. $E = \mathcal{C}[-\pi,\pi]$, $f = \sin x$, $g = \cos x$,
$<f|g>= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = 0$.

Par $\mathbf{v} \in E$ *Eiklīda normu* $||\mathbf{v}||$ sauc $\sqrt{<\mathbf{v}|\mathbf{v}>}$.

2.3. piemērs. $E = \mathcal{C}[-\pi,\pi]$, $f = \sin x$,
$|f| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt} = \sqrt{\pi}$.

Attālumu starp $\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in E$ definē kā $d(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$.

2.1.2. Normas īpašības

2.1. teorēma. E - Eiklīda telpa.

1. $||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{v}||$.
2. $| < \mathbf{v}|\mathbf{w} > | \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$ (Koši-Švarca nevienādība).
3. $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$(trijstūra nevienādība).

PIERĀDĪJUMS
1. $||\lambda\mathbf{v}||^2 =< \lambda\mathbf{v}|\lambda\mathbf{v} >= \lambda^2 < \mathbf{v}|\mathbf{v} >$.

2. $t \in \mathbb{R}$. Apskatīsim $||\mathbf{v} - t\mathbf{w}||^2$:

$||\mathbf{v} - t\mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v} - t\mathbf{w}|\mathbf{v} - t\mathbf{w} >=$

$< \mathbf{v}|\mathbf{v} > -2 < \mathbf{v}|\mathbf{w} > t- < \mathbf{w}|\mathbf{w} >=$

$||\mathbf{v}||^2 - 2 < \mathbf{v}|\mathbf{w} > t + ||\mathbf{w}||^2 t^2 \geq 0 \implies$ diskriminants - nepozitīvs
$\implies < \mathbf{v}|\mathbf{w} >^2 -||\mathbf{v}||^2 \cdot ||\mathbf{w}||^2 \leq 0 \implies | < \mathbf{v}|\mathbf{w} > | \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$.

3. $||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 =< \mathbf{v} + \mathbf{w}|\mathbf{v} + \mathbf{w} >=$

$$< \mathbf{v}|\mathbf{v} > + \underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} > + < \mathbf{w}|\mathbf{v} >}_{=2<\mathbf{v}|\mathbf{w}>} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >=$$
$$=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}_{|<\mathbf{v}|\mathbf{w}>|} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >\leq$$
$$=< \mathbf{v}|\mathbf{v} > +2\underbrace{| < \mathbf{v}|\mathbf{w} > |}_{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||} + < \mathbf{w}|\mathbf{w} >\leq$$
$$= ||\mathbf{v}||^2 + 2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| + ||\mathbf{w}||^2 = (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||)^2. \blacksquare$$

E - ET. Funkciju $N : L \longrightarrow \mathbb{R}$ sauc par *normu*,, ja izpildās šādi nosacījumi:

- $\forall\ \mathbf{v} \in E : \ N(\mathbf{v}) \geq 0,$
- $N(\mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = 0,$
- $N(\lambda\mathbf{v}) = |\lambda|N(\mathbf{v}),$
- $N(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq N(\mathbf{v}) + N(\mathbf{w}).$

2.1. piezīme. Seko, ka Eiklīda norma ir norma.

2.2. piezīme. Seko, ka

$$-1 \leq \frac{<\mathbf{v}|\mathbf{w}>}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} \leq 1, \text{ ja } \mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}.$$

Definēsim $\cos\varphi = \frac{<\mathbf{v}|\mathbf{w}>}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$. φ var interpretēt kā "leņķi" starp $\mathbf{v}$ un $\mathbf{w}$.

2.2. Ortonormētas bāzes

2.2.1. Pamatfakti

E - ET.

- $S \subseteq E$ sauc par *ortogonālu kopu*, ja $<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= 0, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$;
- $S \subseteq E$ sauc par *normētu kopu*, ja $<\mathbf{v}|\mathbf{v}>= 1, \forall\ \mathbf{v} \in E$;
- $S \subseteq E$ sauc par *ortonormētu kopu*, ja

$$<\mathbf{v}|\mathbf{w}>= \begin{cases} 1, & \text{ja } \mathbf{v} = \mathbf{w} \\ 0, & \text{ja } \mathbf{v} \neq \mathbf{w} \end{cases}, \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E.$$

2.2. teorēma. E - ET, $S \subseteq E$: S - ortogonāla nenulles elementu kopa. Tad $\underline{S}$.

PIERĀDĪJUMS $S = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_m\}$.

Pieņemsim pretējo: $\overline{S} \implies \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m$:

- $\exists\ \lambda_j \neq 0$;
- $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$.

Apskatīsim $< \cdot|\mathbf{s}_j >$:

$$< \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{s}_i\right)|\mathbf{s}_j >= \underbrace{< \mathbf{0}|\mathbf{s}_j >}_{=0} \implies$$

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i < \mathbf{s}_i|\mathbf{s}_j >= 0 \implies \lambda_j < \mathbf{s}_j|\mathbf{s}_j >= 0 \implies$
$\lambda_j||\mathbf{s}_j||^2 = 0 \implies \lambda_j = 0$ vai $||\mathbf{s}_j|| = 0$ - pretruna jebkurā gadījumā. ■

E bāzi sauc par *ortonormētu bāzi*, ja tā ir ortonormēta kopa.

2.4. piemērs. $\mathbb{R}^n$ kanoniskā bāze - ortonormēta attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu.

2.2.2. Ortonormalizācija

E - ET. $\forall\ S \in E$ var pārveidot par normētu kopu:

$\forall\ \mathbf{v} \in E$ definēsim $\mathbf{v}^\star = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v} \implies ||\mathbf{v}^\star|| = \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = 1.$

$S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l\} \implies S^\star = \{\mathbf{v}_1^\star, ..., \mathbf{v}_l^\star\}$ - normēta.

2.3. teorēma. (Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms) E - galīgi dimensionāla, ET, $\underline{\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}}$. Definēsim

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1^\star \\ \mathbf{g}_2 = \Big(\mathbf{e}_2 - < \mathbf{e}_2|\mathbf{g}_1 > \mathbf{g}_1\Big)^\star \\ \mathbf{g}_3 = \Big(\mathbf{e}_3 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{g}_2 > \mathbf{g}_2 - < \mathbf{e}_3|\mathbf{g}_1 > \mathbf{g}_1\Big)^\star \\ ... \\ \mathbf{g}_l = \Big(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{li1} < \mathbf{e}_l|\mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i\Big)^\star \end{cases}$$

Tad

1. $\langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle$;

2. $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ ir ortonormēta kopa.

PIERĀDĪJUMS

1. $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{g}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1 \rangle, \\ \mathbf{g}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle, \\ ... \\ \mathbf{g}_l \in \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle, \mathbf{e}_1 \in \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle, \end{array}\right. \Longrightarrow \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l \rangle = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l \rangle$

2. Izmantosim matemātisko indukciju ar bāzi l.

Indukcijas bāze $l = 1$ - izpildās acīmredzami.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}\}$ ir ortonormēta un pierādīsim, ka $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{l-1}, \mathbf{g}_l\}$ ir ortonormēta.

Jāpierāda tikai, ka $< \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j >= 0$, $\forall\ j < l$, visi pārējie nosacījumi seko no indukcijas pieņēmuma.

$\mathbf{g}_l = \left(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{li1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i\right)^\star$. Apzīmēsim

$$\gamma_l = ||\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{li1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i|| \iff \gamma_l \mathbf{g}_l = \mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{li1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i.$$

$$\forall\ j < l : < \gamma_l \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j > = \gamma_l < \mathbf{g}_l | \mathbf{g}_j > =$$

$$< \left(\mathbf{e}_l - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > \mathbf{g}_i \right) | \mathbf{g}_j > =$$

$$< \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j > - \sum_{i=1}^{l-1} < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_i > < \mathbf{g}_i | \mathbf{g}_j > =$$

$$< \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j > - < \mathbf{e}_l | \mathbf{g}_j > = 0. \blacksquare$$

2.3. piezīme. Seko, ka jebkuru ET bāzi var pārveidot par ortonormētu bāzi ar Grama-Šmita algoritmu. Seko, ka $\forall$ ET E $\exists$ ortonormēta bāze.

2.4. piezīme. Grama-Šmita algoritmu var modificēt tā, lai normēšana notiktu pēc ortogonalizācijas (lai ortogonalizācijā nebūtu nepatīkami saucēji.)

3. 6.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Noteikt vai dotās funkcijas f ir bilineāras formas.

(a) $L = \mathcal{M}at(n,k)$, $f(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \det \mathbf{AB}$.

(b) $L = k[X]$, $f(p,q) = \int_0^1 p(t)q'(t)dt$.

6.2 L - LT, $f \in \mathcal{B}il(L)$. Pierādīt, ka f - simetriska $\iff$ f matrica attiecībā uz jebkuru bāzi ir simetriska.

6.3 Atrast bilineāras formas matricu attiecībā uz jaunu bāzi.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$- standarta bāze, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right]$;

$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$.

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$- standarta bāze, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$;

$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$.

6.4 Noteikt vai dotās funkcijas ir reālie skalārie reizinājumi.

(a) $L = \mathbb{R}[X]_2$, $< p|q >= \int_{-1}^{1} p(t)q''(t)dt$.

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $< \mathbf{v}|\mathbf{w} >= v_1w_2 + v_2w_3 + v_3w_1$.

(c) $L = \mathcal{M}at(2,\mathbb{R})$, $< \mathbf{A}|\mathbf{B} >= \mathrm{Tr}(\mathbf{AB})$.

6.5 Dotās bāzes pārveidot par ortonormētām bāzēm attiecībā uz standarta skalāro reizinājumu izmantojot Grama-Šmita algoritmu.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(2,3)\}$.

(b) $E = \mathbb{R}^3$, $\{(1,2,-1),(2,0,1),(3,2,-1)\}$.

(c) $E = \mathbb{R}^4$, $\{(1,1,0,0),(1,1,1,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.6 Aprakstīt tādu skalāru reizinājumu telpā $\mathcal{M}at(n,\mathbb{R})$, lai standarta bāze $\{\mathbf{E}_{11},...,\mathbf{E}_{nn}\}$ būtu ortonormēta.