DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma “Matemātika”

Studiju kurss

Lineārā algebra II

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- k-algebru un matricu algebru īpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt un pētīt LT ar dabiski izdotu papildus operāciju - reizināšanu;
- var pētīt polinomu algebras un matricu algebras pamatīpašības;
- var pētīt, kādus polinomuālus vienādojumus apmierina matricas, definēt matricas *anulējošā polinomu* jēdzienu;
- jebkura kvadrātveida matrica apmierina polinomiālu vienādojumu, kura pakāpe nepārsniedz matricas izmēru.

Svarīgākie jēdzieni: k-algebra, k-algebru piemēri, polinomu algebra, matricu algebra, LO algebra, polinoma pakāpe, normalizēts polinoms, polinomu redukcija, matricu anulējošs polinoms, minimālais anulējošais polinoms,

Svarīgākie fakti un metodes: k-algebru piemēri, polinomu algebra, matricu algebra, LO algebra, polinomu pakāpes īpašības, polinomu dalīšana ar atlikumu, matricu algebru pamatīpašības, matricas anulējošo polinomu īpašības, minimālā anulējošā polinoma īpašības, Hamiltona-Kēli teorēma.

1. k-algebras

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas

k-lineāru telpu A sauc par *k-algebru*, ja kopā A ir definēta *reizināšana*

$$(\mathbf{l}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{lu},$$

kas apmierina šādu nosacījumu: reizināšana ar fiksētu elementu no labās vai kreisās puses ir LA -

- $\mathbf{l}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{lu} + \mathbf{lv}$ (*kreisā distributivitāte*)
- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{l} = \mathbf{ul} + \mathbf{vl}$ (*labā distributivitāte*)
- $\lambda(\mathbf{lu}) = (\lambda\mathbf{l})\mathbf{u} = \mathbf{l}(\lambda\mathbf{u})$.

Var definēt papildnosacījumus:

- reizināšana ir asociatīva/komutatīva $\Longrightarrow$ *asociatīva/komutatīva algebra*,

- $\exists$ neitrālais elements attiecībā uz reizināšanu (*vieninieks*) $\mathbf{e} \in A$:

$$\mathbf{le} = \mathbf{el} = \mathbf{l}, \forall\ \mathbf{l} \in A$$

tad A - *unitāra algebra.*

Izmanto apzīmējumus līdzīgus skaitļu reizināšanai - *multiplikatīvo pierakstu.*

A - k-algebra, $S \leq A$. S sauc par *apakšalgebru*, ja S ir slēgta attiecībā uz reizināšanu:

$$\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S \implies \mathbf{ss}' \in S.$$

1.1. piemērs. $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$.

1.1.2. Klasiskās k-algebras

Algebra ar nulles reizināšanu

Definējot $\mathbf{lu} = \mathbf{0}$, $\forall\ \mathbf{l}, \mathbf{u}$, iegūst asociatīvu un komutatīvu algebru, bez vieninieka.

Komplekso skaitļu algebra

$\mathbb{C}$ ir $\mathbb{R}$-lineāra telpa, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Reizināšana uzdod asociatīvas un komutatīvas $\mathbb{R}$-algebras struktūru, vieninieks - 1.

Polinomu algebra

$k[X]$ vai $k[X_1, ..., X_n]$ - k-lineāra telpa, $\dim k[X] = \infty$. Reizināšana uzdod asociatīvas un komutatīvas k-algebras struktūru, vieninieks - 1.

$\mathcal{M}at(n, k)$

$n \times n$ matricas ar saskaitīšanas un reizināšanas operācijām veido asociatīvu k-algebru, $\dim \mathcal{M}at(n, k) = n^2$. Nulle - $\mathbf{O}_{n,n}$, vieninieks - $\mathbf{E}_n$.

Fiksētas LT lineāro operatoru algebra

L - k-lineāra telpa. LA kompozīcija kopā $\mathcal{E}nd(L)$ uzdod asociatīvas k-algebras struktūru. $\dim(\mathcal{E}nd(L)) = (\dim L)^2$. Nulle - 0 attēlojums, vieninieks - id.

Fiksētas matricas ģenerēta algebra

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$.

$p(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i X^i = p_m X^m + ... + p_0 \in k[X]$.

Definēsim $p(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{A}^i$, pieņemot, ka $A^0 = \mathbf{E}$.

Definēsim $k[\mathbf{A}] = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}at(n,k) | \exists\ p \in k[X] : \ \mathbf{B} = p(\mathbf{A})\}$ - visas matricas, kuras var izteikt kā $\mathbf{A}$ pozitīvu pakāpju un $\mathbf{E}$ lineāru kombināciju.

$k[\mathbf{A}] \leq \mathcal{M}at(n,k) \implies \dim(k[\mathbf{A}]) \leq n^2$.

1.2. Polinomu k-algebra

1.2.1. Definīcijas

$k[X]$ - viena argumenta X polinomi, var domāt kā funkcijas $k \to k$ vai formālas summas:

$$f \in k[X] \iff f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0.$$

Simbola X vietā var lietot jebkuru citu simbolu.

- $a_i \in K$ sauc par polinoma *koeficientiem.*
- Polinomus formā aX^m sauc par *locekļiem (termiem).*
- Polinomus formā X^m sauc par *monomiem.*
- Polinoma koeficientu a_0 sauc par *brīvo locekli.*
- Polinoma f locekli aX^m, $a \neq 0$, ar lielāko pakāpi m sauc par *vecāko locekli*, apzīmē ar $\mathcal{H}(f)$, a sauc par *vecāko koeficientu*, m sauc par polinoma *pakāpi* $\deg(f)$.

Polinomu sauc par *normalizētu polinomu*, ja vecākais koeficients ir 1.

1.2. piemērs. $f = -3X^2 + 10X - 4$, $\mathcal{H}(f) = -3X^2$, $\deg(f) = 2$.

Ja $\deg(f) = 0, (1, 2, 3)$, tad f ir *konstants (lineārs , kvadrātisks, kubisks)* polinoms.

Divi polinomi ir vienādi $\iff$ tiem ir vienādi koeficienti pie visām argumenta pakāpēm.

1.2.2. Īpašības

1.1. teorēma. $f, g \in k[X]$. Tad:

1. $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$;
2. $f \neq 0, g \neq 0 \implies \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

PIERĀDĪJUMS

1. Divu polinomu summas vecākā koeficienta indekss nevar būt lielāks kā lielākā no polinomu pakāpēm (var būt mazāks, ja koeficienti pie dažiem monomiem saīsinās).

2. $\begin{cases} f = f_n X^n + \ldots \\ g = g_m X^m + \ldots \end{cases} \implies$

$$fg = (f_n X^n + \ldots)(g_m X^m + \ldots) = (f_n g_m) X^{n+m} + \ldots$$

k - lauks $\Longrightarrow$ $f_n g_m \neq 0$ $\Longrightarrow$

$$\deg(fg) = n + m = \deg(f) + \deg(g). \blacksquare$$

1.2.3. Dalīšana ar atlikumu

$f, g \in k[X]$, $\deg(f) \geq \deg(g)$. Definēsim operāciju polinomu kopā - *f redukciju ar g:*

$$(f, g) \mapsto \mathcal{R}_g(f) = f - \left(\frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)}\right) \cdot g.$$

1.3. piemērs.
$\mathcal{R}_{X+1}(X^2 + 1) = (X^2 + 1) - X(X + 1) = -X + 1.$

1.2. teorēma. $\deg\Big(\mathcal{R}_g(f)\Big) < \deg(f).$

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathcal{H}(f) = a_n X^n \\ \mathcal{H}(g) = b_m X^m, n \geq m \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}.$$

$$\mathcal{H}\Big(\mathcal{R}_g(f)\Big) = \mathcal{H}\Big(f - \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)}g\Big) = \mathcal{H}\Big(f - \frac{a_n X^n}{b_m X^m}g\Big) =$$
$$\mathcal{H}\Big(f - \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}(b_m X^m + ...)\Big) = \mathcal{H}(\underbrace{a_n X^n + ...}_{=f} - a_n X^n - ...).$$

Redzam, ka locekļi ar X^n saīsinās, tāpēc apgalvojums ir spēkā. ■

1.3. teorēma. (*viena argumenta polinomu dalīšana ar atlikumu*) $f, g \in k[X]$. Tad eksistē tieši viens polinomu pāris $d, a \in k[X]$:

1. $f = dg + a$,
2. $\deg(a) < \deg(g)$.

PIERĀDĪJUMS

d un a eksistence.

Veiksim pēctecīgi redukcijas $\mathcal{R}_g$ sākot ar f, tik ilgi, kamēr redukcija ir definēta. Iegūsim polinomu virkni

$$f \to \mathcal{R}_g(f) \to \mathcal{R}_g^2(f) \to ... \to \mathcal{R}_g^l(f), \text{ kur } \deg \mathcal{R}_g^l(f) < \deg g.$$

Ir spēkā polinomiālu vienādību sistēma

$$\begin{cases} \mathcal{R}_g(f) = f - d_1 g \\ \mathcal{R}_g^2(f) = \mathcal{R}_g(f) - d_2 g \\ \dots \\ \mathcal{R}_g^l(f) = \mathcal{R}_g^{l-1}(f) - d_l g. \end{cases}$$

Saskaitot vienādību kreisās un labās puses, iegūsim

$$\sum_{i=1}^{l} \mathcal{R}_g^i(f) = f + \sum_{i=1}^{l-1} \mathcal{R}_g^i(f) + \sum_{i=1}^{l} d_i g \implies$$

$$\underbrace{\mathcal{R}_g^l(f)}_{=a} = f - g \underbrace{\sum_{i=1}^{l} d_i}_{=d} \implies$$

$$f = dg + r, \text{ kur } \deg a < \deg g.$$

d un a vienīgums.

Pieņemsim, ka eksistē divi polinomu pāri $(d,a),(d',a')$:

$$f = dg + a = d'g + a' \implies (d-d')g = a' - a.$$

Zinām, ka $\deg(a'-a) \le \max(\deg a', \deg(-a)) < \deg(g)$.

$\deg\Big((d-d')g\Big) = \deg(d-d') + \deg(g) < \deg(g) \implies$
$d - d' = 0 \implies \begin{cases} d = d', \\ a = a'. \end{cases}$ $\blacksquare$

1.4. piemērs. $f = X^5 + X^2 + 1$, $g = X^2 + X + 1$ virs $\mathbb{Q}$.
$\mathcal{R}_g(f) = f - \frac{\mathcal{H}(f)}{\mathcal{H}(g)} \cdot g = f - X^3 \cdot g = -X^4 - X^3 + X^2 + 1;$
$\mathcal{R}_g^2(f) = \mathcal{R}_g(f_1) = f_1 - (-X^2) \cdot g = 2X^2 + 1;$
$\mathcal{R}_g^3(f) = \mathcal{R}_g(f_2) = f_2 - 2 \cdot g = -2X - 1.$
$\mathcal{R}_g^4(f)$ nav definēts, jo $\deg\Big(\mathcal{R}_g^3(f)\Big) < \deg(g)$.

Rezultātā iegūsim

$$f = (X^3 - X^2 + 2)g + (-2X - 1).$$

Vēlams izmantot dalīšanu "ar stūrīti".

$f, g \in k[X]$. Saka, ka f *dalās ar* g $(g|f)$, ja $\exists\, d \in k[X] : f = dg$.

2. Lineāro operatoru k-algebras

Pētīsim lineāro operatoru algebru koordinātu pierakstā:

- LO atbilst matricas ar matricu saskaitīšanu un reizināšanu;
- $\mathcal{E}nd(L) \simeq \mathcal{M}at(n, k)$, ja $\dim L = n$.

2.1. Pamatīpašības

2.1. teorēma.

1. $\mathcal{M}at(n, k)$ ar matricu operācijām veido asociatīvu un unitāru k-algebru.
2. $k[\mathbf{A}]$ ar matricu operācijām veido asociatīvu, komutatīvu un unitāru k-algebru.

PIERĀDĪJUMS Jāpārbauda, ka izpildās visas aksiomas. Tas seko no matricu operāciju īpašībām.■

2.2. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$. Tad $\exists\ p \in k[X] :\ p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

PIERĀDĪJUMS $\dim \mathcal{M}at(n,k) = n^2 \implies$

$\exists\ m \in \mathbb{N}, m \leq n^2 : \overline{\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^m\}}$ - jo LT nevar būt vairāk kā $\dim L$ lineāri neatkarīgi elementi $\implies$

$\exists\ c_i : c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A}_1 + ... + c_m\mathbf{A}^m = \mathbf{O}$.

Apzīmēsim $p(X) = c_0 + c_1X + ... + c_mX^m \in k[X]$, tad $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.
■

2.2. Lineāra operatora anulējošie polinomi

2.2.1. Definīcijas

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,n,k)$, $p \in k[X]$. Ja $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, tad p sauc par $\boldsymbol{A}$*-anulējošu polinomu.*

Visu **A**-anulējošu polinomu kopu apzīmē ar $\mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

Minimālas pakāpes **A**-annulējošu normalizētu polinomu sauc par **A** *minimālo anulējošo polinomu*, apzīmē ar $m_{\mathbf{A}}$.

2.1. piemērs. $m_{\mathbf{O}} = X$, $m_{\mathbf{E}} = X - 1$, $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, $m_{\mathbf{A}} = X^2 - 1$.

2.2.2. Anulējošo polinomu īpašības

2.3. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, k)$.

1. $f, g \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \implies f + g \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.
2. $f \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \implies \lambda f \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.
3. $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \\ p \in k[X] \end{array}\right. \implies f \cdot p \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\left\{\begin{array}{l} f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \\ g(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \end{array}\right. \implies (f + g)(\mathbf{A}) = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies$

$f + g \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

2. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies (\lambda f)(\mathbf{A}) = \lambda \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies \lambda f \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$.

3. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies (f \cdot p)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) \cdot p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \cdot p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \implies$ $f \cdot p \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A})$. ■

2.4. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, k)$.

1. $m_{\mathbf{A}}$ ir noteikts viennozīmīgi.
2. $\deg m_{\mathbf{A}} = \dim k[\mathbf{A}]$.
3. $p \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \implies m_{\mathbf{A}} | p$.
4. $\mathbf{A}' = \mathbf{SAS}^{-1} \implies m_{\mathbf{A}'} = m_{\mathbf{A}}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $\exists$ divi $\mathbf{A}$ minimālie anulējošie polinomi m un $m' \implies m(\mathbf{A}) - m'(\mathbf{A}) = \mathbf{O} - \mathbf{O} = \mathbf{O} \implies$

$$\begin{cases} m - m' \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \\ \deg(m - m') < \deg m. \end{cases}$$

Ja $m - m' \neq 0$ - pretruna.

2. $\deg m_{\mathbf{A}} = m \implies \mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + ... + a_0\mathbf{E} = \mathbf{O} \implies$
$\mathbf{A}^m \in \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle \implies$ atkārtoti izsakot augstākas $\mathbf{A}$ pakāpes kā $\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1}\}$ lineāras kombinācijas iegūsim, ka

$$\forall\, l \geq m : \mathbf{A}^l \in \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle \implies k[\mathbf{A}] = \langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1} \rangle.$$

$\overline{\{\mathbf{E}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{m-1}\}} \implies \exists$ netriviāla lineāra kombinācija, kas saista šos elementus:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{A}^i = \mathbf{O}$$

- pretruna, jo ir iegūts $\mathbf{A}$-anulējošs polinoms ar zemāku pakāpi nekā m.

3. Izdalīsim p ar $m_{\mathbf{A}}$:

$$p = d \cdot m_{\mathbf{A}} + a, \text{ kur } \deg a < \deg m_{\mathbf{A}}.$$

Ievietosim argumenta vietā $\mathbf{A}$:

$$\underbrace{p(\mathbf{A})}_{=\mathbf{O}} = \underbrace{d(\mathbf{A})m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})}_{=\mathbf{O}} + a(\mathbf{A}) \implies a(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

$a \neq 0 \implies$ pretruna, jo ir iegūts **A**-anulējošs polinoms ar mazāku pakāpi nekā $\deg m_{\mathbf{A}}$.

4. Izmanto īpašību $(\mathbf{SAS}^{-1})^i = \mathbf{SA}^i\mathbf{S}^{-1}$, $\forall\ i$. ■

2.2.3. Hamiltona-Kēli teorēma

Pagaidām ir zināms, ka $\deg(m_{\mathbf{A}}) \leq n^2$.

Izrādās, ka $\forall\ \mathbf{A}\ R_{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}nn(\mathbf{A}) \implies \deg(m_{\mathbf{A}}) \leq n$.

2.2. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$. $a_{12} \neq 0$ vai $a_{21} \neq 0 \implies$ $4 \geq \deg m_{\mathbf{A}} \geq 2$.

Ideja: iegūt matricu vienādību formā

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = f(\lambda)\mathbf{E}$$

ar cerību izteikt $\mathbf{B}$ kā polinomiālu funkciju no $\mathbf{A}$ un λ.

Atcerēsimies matricu invertēšanas algoritmu ar papildinošās matricas palīdzību:

$$\mathbf{M}(ap\ \mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})\mathbf{E}$$

$$\Longrightarrow\ \exists \mathbf{B}:\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = \underbrace{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{B} = ap\,(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \left[\begin{array}{c|c} a_{22}-\lambda & -a_{12} \\ \hline -a_{21} & a_{11}-\lambda \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{22} & -a_{12} \\ \hline -a_{21} & a_{11} \end{array}\right]}_{=\mathbf{A}'} - \lambda\mathbf{E}.$$

Abas vienādojuma puses pārveidosim kā polinomiālas funkcijas ar matricu koeficientiem:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{E}) = \underbrace{(r_0 + r_1\lambda + \lambda^2)}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' + \lambda(-\mathbf{A} - \mathbf{A}') + \lambda^2\mathbf{E} = r_0\mathbf{E} + \lambda(r_1\mathbf{E}) + \lambda^2\mathbf{E} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}' = r_0\mathbf{E} \\ -\mathbf{A} - \mathbf{A}' = r_1\mathbf{E} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}' = r_0\mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}'\mathbf{A} = r_1\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{r_0\mathbf{E} + r_1\mathbf{A} + \mathbf{A}^2}_{=R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})} = \mathbf{O}.$$

2.5. teorēma. (Hamilton-Cayley) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, k)$. Tad $R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$.

PIERĀDĪJUMS

Atcerēsimies matricu invertēšanas algoritmu ar papildinošās matricas palīdzību:

$$\mathbf{M}(ap\ \mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})\mathbf{E}.$$

$$\Longrightarrow \exists\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\lambda, \mathbf{A}) :\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{B} = \underbrace{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)}\mathbf{E}.$$

$\mathbf{B} = ap\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ elementi ir polinomi no λ, kuru pakāpe nepārsniedz $n-1$ (tas seko no algebriskā papildinājuma konstruēšanas algoritma)

$$\Longrightarrow \ \mathbf{B} = \mathbf{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0 \ \Longrightarrow$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{B}_i \lambda^i = \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j \lambda^j \Big)}_{=R_{\mathbf{A}}(\lambda)} \mathbf{E}.$$

Atverot iekavas un salīdzinot (matricu) koeficientu pie vienādām λ pakāpēm, iegūsim matricu sistēmu:

$$\begin{cases} \mathbf{AB}_0 = r_0\mathbf{E} \\ \mathbf{AB}_1 - \mathbf{B}_0 = r_1\mathbf{E} \\ ... \\ \mathbf{AB}_{n-1} - \mathbf{B}_{n-2} = r_{n-1}\mathbf{E} \\ -\mathbf{B}_{n-1} = r_n\mathbf{E}. \end{cases}$$

Reizinot i-to vienādojumu no kreisās malas ar $\mathbf{A}^{i-1}$ un saskaitot visu kopā iegūsim

$$\mathbf{O} = r_0\mathbf{E} + r_1\mathbf{A} + ... + r_{n-1}\mathbf{A}^n = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\blacksquare.$$

3. 5.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Noteikt, vai dotās k-LT ar doto reizināšanu $*$ ir k-algebras.

(a) $L = k^n$, $(x_1, ..., x_n) * (y_1, ..., y_n) = (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$;
(b) $L = \mathcal{M}at(n, k)$, $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$;
(c) $L = k[X]$, $f * g = f'g - fg'$.

5.2 Izdalīt polinomus f ar g (atrast dalījumu un atlikumu).

(a) $f = X^4 + X + 1$, $g = X + 1$, virs $\mathbb{Q}$;
(b) $f = X^3 - \sqrt{2}X^2 - 1$, $g = X^2 + X - \sqrt{2}$, virs $\mathbb{R}$;
(c) $f = X^3 + iX + (1 - i)$, $g = iX + 1$, virs $\mathbb{C}$.

5.3 Atrast matricu minimālos anulējošos polinomus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;
(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c} i & i & 0 \\ \hline 0 & i & i \\ \hline 0 & 0 & i \end{array}\right]$, virs $\mathbb{C}$

5.4 Atrast LO minimālos anulējošos polinomus.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, f - projekcija uz x-asi;
(b) $L = k[X]_3$, $f(p) = p'$;
(c) $L = \mathcal{M}at(2, k)$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{ME}_{12}$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.5 Atrast matricu vai LO minimālos anulējošos polinomus.

(a) $\mathbf{D}$ - diagonāla $n \times n$ matrica;
(b) $\mathbf{T}$ - augšēji trijstūrveida $n \times n$ matrica;
(c) $L = \mathcal{M}at(n, k)$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{MA} + \mathbf{BM}$, kur $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ fiksētas matricas;
(d)
(e) $L = k[X]_n$, $f(p) = \int_0^x p(t)dt$.