DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

4.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Perrona teorēma **2**
1.1. Reālu vektoru un matricu salīdzināšana 2
1.2. Teorēma 3
1.3. Pastiprinājumi 6

1. Perrona teorēma

1.1. Reālu vektoru un matricu salīdzināšana

$L = \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R}$.

$\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in L$. Saka, ka $\mathbf{M} \geq \mathbf{M}'$, ja $m_{ij} \geq m'_{ij}$, $\forall\ i, j$. Var definēt arī stingru salīdzināšanu $<$. Speciālgadījumos iegūsim salīdzināšanu rindām un kolonnām.

1.1. piemērs. $(3, 4, 5) < (4, 4.5, 7)$.

Tā var salīdzināt lineāru telpu elementi var laukos, kuros ir sākotnēji dabiski definēts pilns sakārtojums.

1.2. Teorēma

Kolonnas $\mathbf{c}$ i-to koordināti apzīmēsim ar c_i.

Ar $|\mathbf{M}|$ apzīmēsim matricu, kuras elementi ir $|m_{ij}|$, speciālgadījumi - rindas vai kolonnas.

1.1. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j:\ a_{ij} > 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$:

1. $\lambda > 0$;
2. $\exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;
3. $\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.

PIERĀDĪJUMS Pētīsim $\mathbf{A}$ darbību uz vektoriem-kolonnām ar pozitīvām koordinātēm. Apzīmēsim tādu kolonnu kopu ar $\mathcal{P}$.

$\forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{P}$ definēsim

$$\rho(\mathbf{x}) = \min_i \frac{(\mathbf{Ax})_i}{x_i}.$$

Seko, ka $\mathbf{Ax} \geq \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Citiem vārdiem sakot, $\rho(\mathbf{x})$ ir maksimālais reālais atrisinājums nevienādībai $\mathbf{Ax} \geq \lambda\mathbf{x}$ attiecībā uz λ.

Definēsim

$$\lambda_0 = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}).$$

Citiem vārdiem sakot, λ_0 ir maksimālais reālais skaitlis, kuram ir atrisināma nevienādība $\mathbf{Ax} \geq \lambda\mathbf{x}$ attiecībā uz λ un $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

Formāli runājot, būtu jāpierāda, ka λ_0 kā maksimums tiek sasniegts uz konkrēta vektora. To var pierādīt, apskatot tikai vektorus $\mathbf{x}$, kuriem $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Pieņemsim, ka λ_0 tiek sasniegts uz vektora $\mathbf{y}$.

$\mathbf{Ay} \geq \lambda_0\mathbf{y}$.

$\mathbf{Ay} \neq \lambda_0 \mathbf{y} \implies \mathbf{Ay} > \lambda_0 \mathbf{y} \implies$

$\exists\ \lambda_1 > \lambda_0 :\ \mathbf{Ay} \geq \lambda_1 \mathbf{y}$ un vismaz vienai koordinātei vienādība tiek sasniegta $\implies$ pretruna, jo pēc pieņēmuma λ ir maksimālais skaitlis ar šādu īpašību.

Ir pierādīts, ka $\lambda_0 \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$ ar īpašvektoru $\mathbf{y}$.

1. Acīmredzami $\lambda_0 > 0$, jo $\mathbf{A}$ un $\mathbf{y}$ satur tikai pozitīvus elementus.

2. $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$.

3. Pieņemsim, ka $\exists\ \lambda_1 \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $|\lambda_1| > \lambda_0$, (var būt $\lambda_1 \in \mathbb{C}$) ar īpašvektoru $\mathbf{w}$ - tas var būt ar negatīvām vai 0 koordinātēm.

$$\implies \mathbf{A}|\mathbf{w}| = |\mathbf{A}||\mathbf{w}| \geq |\mathbf{Aw}| = |\mathbf{Aw}| = |\lambda_1 \mathbf{w}| = |\lambda_2||\mathbf{w}| \implies$$

Ir atrasta jauna reāla īpašvērtība $|\lambda_1| > \lambda_0$ ar nenegatīvu īpašvektoru $\mathbf{w}$ - pretruna, jo λ_0 ir maksimālais reālais skaitlis, kas atrisina nevienādību $\mathbf{Ax} \geq \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. ■

1.1. piezīme. Iepriekšējās teorēmas terminos λ_0 sauksim par $\mathbf{A}$ *Perrona īpašvērtību* un normētu $\mathbf{y} :\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ par *Perrona īpašvektoru.*

1.3. Pastiprinājumi

1.2. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j: \ a_{ij} > 0$, λ_0 - **A** Perrona īpašvērtība. Tad

1. $\dim \mathbf{A}^{\lambda_0} = 1$.
2. $\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(A) \backslash \{\lambda_0\}$: $|\lambda| < \lambda_0$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■

Kvadrātveida matricu **A** sauc par *nereducējamu*, ja to nevar triangulēt ar otrā veida pārveidojumu matricām. Citiem vārdiem sakot, nekāda apakštelpa, kuru ģenerē sākotnējās bāzes apakškopa, nav invarianta apakštelpa.

1.3. teorēma. (Perrona-Frobeniusa teorēma) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, **A** ir nereducējama matrica, $\forall\ i, j: \ a_{ij} \geq 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$:

1. $\lambda > 0$;

2. $\exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;

3. $\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■