DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt īpašvērtību un īpašvektoru īpašības un lietojumus.

Lekcijas kopsavilkums:

- matricas raksturīgais polinoms un, sekojoši, īpašvērtības nav atkarīgs no bāzes,
- īpasvektori ar dažādām īpašvērtībām ir lineāri neatkarīgi,
- zinot matricas elementus var aptuveni noteikt īpašvērtību atrašanās vietu,
- ja matricas apmierina noteiktus nosacījumus, tad var atrast bāzes, attiecībā uz kurām tās satur daudz nuļļu - tās ir diagonālajā vai trijstūrveida formā.

Svarīgākie jēdzieni: līdzīgas matricas, diagonalizējama matrica, triangulējama matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: raksturīgā polinoma invariance, raksturīgā polinoma koeficientu īpašības, īpašvektoru īpašības, Geršgorina teorēma reālā un kompleksā gadījumā, Perrona teorēma, diagonalizējamības kritēriji, triangulējamības kritērijs.

1. Īpašvērtību un īpašvektoru lietojumi

1.1. Diskrētas sistēmas matemātiskajā medicīnā

Apskatīsim vienkāršu vēža audzēja modeli. Vēža audzēja lielumu nosaka tā šūnu skaits u_n. Pieņemsim, ka vēža audzēja dinamiku nosaka kāda ķīmiska viela P, ko izdala pats audzējs, P daudzums laika momentā n ir v_n.

Pieņemsim, ka vēža audzēja šūnu skaits un P daudzums apmierina *diskrētu dinamisku sistēmu*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n. \end{cases}$$

Pamatojums:

- uzskatām, ka ja nav vielas P klātbūtnes, tad audzējs laika vienībā palieinās 2 reizes;
- P iznīcina audzēja šūnas, tāpēc -1 pirmajā vienādojumā, tas tiek iegūts mainot P nosacītās vienības;

- audzējs izdala P, pieņemsim, ka vidēji viena audzēja svara vienība izdala 3/4 vienības P.

Apzīmēsim $\left[\begin{array}{c} u_n \\ \hline v_n \end{array}\right]$ ar $\mathbf{x}_n$, iegūsim matricu vienādību

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \text{ kur } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 3/4 & 0 \end{array}\right]$$

Ja ir zināma sākotnējā $\mathbf{x}$ vērtība $\mathbf{x}_0$, tad pēc m laika vienībām sistēmas stāvoklis būs

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{x}_0.$$

Pagaidām tiek izmantota kanoniskā bāze $\left\{\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]\right\}$. Atradīsim labāku bāzi. $\mathbf{A}$ ir īpašvērtības $\{3/2, 1/2\}$ ar īpašvektoriem $\left\{\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 2/3 \\ \hline 1 \end{array}\right]\right\}$

Attiecībā uz jauno bāzi matrica ir $\mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c} 3/2 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 \end{array}\right]$, kur $\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 2/3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S} \Longrightarrow$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})^m\mathbf{x}_0 = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})...(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})\mathbf{x}_0 =$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^m\mathbf{S}\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{m+1} - \frac{1}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^{m} + \frac{1}{2}^{m} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^m \end{array}\right]\mathbf{x}_0 =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{m+1} - \frac{1}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^{m} + \frac{1}{2}^{m} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m + \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^m \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline v_0 \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{3}{2}^{m+1} & -\frac{3}{2}^{m} \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline v_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}^{m+1}u_0 - \frac{3}{2}^{m}v_0 \\ \hline \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m u_0 - \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m v_0 \end{array}\right] =$$

$$(\tfrac{3}{2})^m \left[\begin{array}{c} \frac{3}{2}u_0 - v_0 \\ \hline \frac{3}{4}u_0 - \frac{1}{2}v_0 \end{array}\right].$$

Tālāk ir jāveic analīze. Redzams, ka audzējs aug, ja sākuma nosacījumi ir bioloģiski relevanti.

Pieņemsim, ka var panākt, lai vielas P izdalīšanās notiek intensīvāk. To var panākt ar terapeitiskām metodēm, piemēram, palielinot audzēja šūnu membrānu caurlaidību. Pieņemsim, ka šajā gadījumā iegūsim sistēmu ar matricu $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right]$.

$\mathbf{A}$ ir īpašvērtības $\{1-i, 1+i\}$ ar īpašvektoriem $\left\{\left[\begin{array}{c} 1/2+i/2 \\ \hline 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1/2-i/2 \\ \hline 1 \end{array}\right]\right\}$.

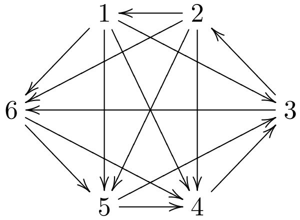
Var pierādīt, ka šajā gadījumā audzēja lielums pozitīvajā apgabalā svārstās, nevis aug.

1.2. Reitingu zinātne

Dažādās sitācijās rodas nepieciešamība sakārtot pētāmās sistēmas vienības atkarībā no to īpašībām, piemēram:

- komandas sporta sacensībās,
- cilvēkus pēc to īpašībām,
- interneta lapas pēc to popularitātes.

1.1. piemērs. 6 komandas spēlē visas spēles savā starpā, neizšķirtu spēļu nav. Attēlosim turnīra rezultātus ar grafu, šķautne $a \to b$ nozīmē, ka a zaudēja b:



Atradīsim matricu $\mathbf{A}$, kuras grafs ir attēlots:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kā salīdzināt savā starpā komandas $\{1,2\}$ un $\{3,5,6\}$? Tām ir vienāds vinnēto un zaudēto spēlu skaits.

Mēğināsim definēt komandu reitingu sarakstu $r_1, ..., r_6$ tā, lai būtu apmierināti šādi nosacījumi:

- komanda i ir stiprāka nekā komanda $j \iff r_i > r_j$;
- katra uzvara dod ieguldījumu reitingā, kas ir proporcionāls uzvarētās komandas reitingam (jo stiprāka komanda ir uzvarēta, jo lielāku ietekmi šī uzvara ir atstājusi uz vinnējušās komandas reitingu).

Attiecībā uz r_i iegūsim LVS:

$$\begin{cases} r_1 = c\sum_{j=1}^{6} a_{1j} r_j \\ ... \\ r_6 = c\sum_{j=1}^{6} a_{6j} r_j \end{cases}$$

To var pārveidot ekvivalentā matricu vienādojumā

$$\mathbf{r} = c\mathbf{A}\mathbf{r} \iff \mathbf{A}\mathbf{r} = \left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{r}, \text{ kur } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ ... \\ r_6 \end{bmatrix}.$$

Redzam, ka ir jāatrod **A** īpašvērtības un īpašvektori.

Šajā gadījumā

- $R_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda - 1$,
- ir tikai viena pozitīva īpašvērtība $\frac{1}{c} \approx 2.07$,
- atbilstošais īpašvektors - reitingu saraksts, normējot summu uz 100, ir $(5, 11, 23, 25, 17, 16)$.

1.2. piemērs. Apskatīsim visu interneta HTML lapu kopu P. Definēsim šķautni $a \to b$, ja a atsaucas uz b (satur hiperlinku uz b). Kā sakārtot visas lapas atkarībā no to ietekmības? Līdzīgi kā iepriekšējā piemērā iegūsim matricas īpašvektoru atrašanas uzdevumu. Pamatojumā ir jāizmanto Perrona teorēmas tipa rezultāti.

Google meklēšanas programma izmanto šādus reitingus, lai šķirotu atrasto lapu sarakstu, pirmajā lappusē parādās lapas ar visaugstāko reitingu (PageRank algoritms).

Matricas ir milzīgas - $10^9 \times 10^9$, īpašvektori tiek meklēti ar tuvinātām, iteratīvām metodēm.

2. Īpašvērtību un īpašvektoru īpašības

2.1. Īpašvektoru un raksturīgā polinoma īpašības

2.1. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. f matricu raksturīgie polinomi nav atkarīgi no bāzes (raksturīgais polinoms ir LO *invariants*).

PIERĀDĪJUMS

Pārejot uz citu bāzi ar pārejas matricu $\mathbf{S}$ f matrica mainās saskaņā ar formulu

$\mathbf{F}' = \mathbf{SFS}^{-1} \Longrightarrow$

$$R_{\mathbf{F}'}(\lambda) = \det(\mathbf{F}' - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{SFS}^{-1} - \lambda\mathbf{E}) =$$

$$\det\left(\mathbf{SFS}^{-1} - \mathbf{SS}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\right) = \det\left(\mathbf{SFS}^{-1} - \mathbf{S}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{S}^{-1}\right) =$$

$$= \det\left(\mathbf{S}(\mathbf{FS}^{-1} - \lambda\mathbf{ES}^{-1})\right) = \det\left(\mathbf{S}(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{S}^{-1}\right) =$$

$$\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\det(\mathbf{S}^{-1}) = \underbrace{\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{S}^{-1})}_{=1}\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) =$$

$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = R_{\mathbf{F}}(\lambda)$. ■

2.2. teorēma. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

1. $R_{\mathbf{A}}(\lambda) \in k[\lambda]$.
2. $R_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) + \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{zemākas } \lambda \text{ pakāpes}}$.
3. $R_{\mathbf{A}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar $\det \mathbf{A}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Matricas determinants ir polinomiāla funkcija no tās elementiem.

2. Izvirzīsim $\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} - \lambda & ... & a_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline a_{n1} & ... & a_{nn} - \lambda \end{array} \right]$ pēc pirmās rindas interesējoties tikai par koeficientiem pie λ^n un λ^{n-1}. Šajā izvirzījumā tikai pirmais loceklis var saturēt tādus monomus. Turpina šo procesu ar mazākām matricām.

Beidzot šo procesu iegūst, ka koeficienti pie monomiem λ^n un λ^{n-1} ir tādi paši kā polinomam $(a_{11}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda)$.

3. $\forall\, f(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in k[X]$ brīvais loceklis ir vienāds ar $f(0) \implies R_{\mathbf{A}}(\lambda)$ brīvais loceklis ir vienāds ar $R_{\mathbf{A}}(0) = \det \mathbf{A}$. ■

Dota matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ sauc par $\mathbf{A}$ *pēdu* tr $\mathbf{A}$.

2.1. piezīme. No pirmās teorēmas seko, ka visi raksturīga polinoma koeficienti (piemēram, pēda un determinants) ir invarianti (nav atkarīgi no bāzes): tr $\mathbf{A}$ =tr $\mathbf{SAS}^{-1}$.

2.3. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, n, k)$.

1. $\forall\, \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $L^\lambda \leq L$.
2. $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subseteq \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$, λ_i - dažādi, $\forall\, i$: $\mathbf{l}_i \in L^{\lambda_i}$. Tad $\underline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_m\}}$.
3. $\lambda, \mu \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}), \lambda \neq \mu \implies L^\lambda + L^\mu = L^\lambda \oplus L^\mu$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L^\lambda \implies \begin{cases} f(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}') = \lambda\mathbf{l} + \lambda\mathbf{l}' = \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{l}') \\ f(\mu\mathbf{l}) = \mu f(\mathbf{l}) = \mu\lambda\mathbf{l} = \lambda(\mu\mathbf{l}) \end{cases}$

2. Pierādījums no pretējā. Pieņemsim, ka n ir minimālā indeksa vērtība ar īpašību $\overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n\}}$ vai, citos terminos $\mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{l}_i$.

$\implies f(\mathbf{l}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(\mathbf{l}_i) \implies \lambda_n \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{l}_i.$

$\lambda_n = 0 \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\}}$ - pretruna ar pieņēmumu.

$\lambda_n \neq 0 \implies \begin{cases} \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{l}_i \\ \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i \lambda_i / \lambda_n) \mathbf{l}_i \end{cases} \implies$

$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)}_{\neq 0} \mathbf{l}_i \implies \exists$ netriviāla lineāra kombinācija,

kas saista $\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\} \implies \overline{\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_{n-1}\}}$.

3. $\mathbf{x} \in L^\lambda \cap L^\mu \implies \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ir vienlaicīgi īpašvektors ar divām īpašvērtībām - pretruna. ■

2.2. Klasiski rezultāti par īpašvērtību lokalizāciju

2.2.1. Geršgorina teorēma

2.4. teorēma. ($\mathbb{R}$ variants) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$ definēsim $r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Tad

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})\ \exists\, i :\ \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].$$

(katra reāla īpašvērtība atrodas kādā no intervāliem ar centru a_{ii} un garumu $2r_i$)

PIERĀDĪJUMS

$$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \iff \exists\, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix} :\ \mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c} \iff$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādu i, ka $|c_i| = \max_j |c_j| > 0$. Apskatīsim i-to vienādojumu:

$$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}c_j \;\Longleftrightarrow\; \lambda - a_{ii} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i} \;\Longrightarrow$$

$$|\lambda - a_{ii}| = |\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}\cdot\frac{c_j}{c_i}| =$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,\underbrace{|\frac{c_j}{c_i}|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i \;\Longrightarrow\; \lambda \in [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i].\blacksquare$$

2.1. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ reālās īpašvērtības atrodas intervālā $[0, 4]$.

Apzīmēsim ar $B(z, r)$ rinķi kompleksajā plaknē ar centru $z \in \mathbb{C}$ un rādiusu $r \in \mathbb{R}$.

2.5. teorēma. ($\mathbb{C}$ variants) $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{C})$, $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$ definēsim $r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Tad

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})\ \exists\ i:\ \ \lambda \in B(a_{ii}, r_i).$$

(katra reāla īpašvērtība atrodas kādā no *Geršgorina riņķiem*)

PIERĀDĪJUMS

$$\lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \iff \exists\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \hline ... \\ \hline c_n \end{bmatrix}:\ \mathbf{Ac} = \lambda \mathbf{c} \iff$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_1 \\ ... \\ a_{n1}c_1 + ... + a_{1n}c_n = \lambda c_n \end{cases}$$

Izvēlēsimies tādu i, ka $|c_i| = \max_j |c_j|$. Apskatīsim i-to vienādojumu:

$$\lambda c_i - a_{ii}c_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}c_j \iff \lambda - a_{ii} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i} \Longrightarrow$$

$$|\lambda - a_{ii}| = |\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{c_j}{c_i}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||\frac{c_j}{c_i}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i$$

$\Longrightarrow\ |\lambda - a_{ii}| \leq r_i \ \Longrightarrow\ \lambda \in B(a_{ii}, r_i)$. ■

2.2.2. Perrona teorēma

2.6. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n, \mathbb{R})$, $\forall\ i, j:\ a_{ij} > 0$. Tad $\exists\ \lambda \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$:

1. $\lambda > 0$;
2. $\exists\ \mathbf{c} = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ \hline \dots \\ \hline c_n \end{array}\right] \in \mathbf{A}^{\lambda}$: $\forall\ i\ c_i > 0$;
3. $\forall\ \lambda' \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A})$: $|\lambda'| \leq \lambda$.

PIERĀDĪJUMS Skatīt papildmateriālu.■

2.2. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$,

$\mathcal{S}pec(\mathbf{A}) = \{-1.6824, 0.2859, 10.3965\}$.

2.3. Lineāru operatoru matricu vienkāršošana

2.3.1. Diagonalizācija

Matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ sauc par *diagonalizējamu*, ja $\exists$ invertējama matrica $\mathbf{S} \in \mathcal{M}at(n,k)$ tāda, ka $\mathbf{SAS}^{-1}$ ir diagonāla matrica. Šādā gadījumā saka, ka $\mathbf{S}$ *diagonalizē* $\mathbf{A}$.

Pāreju $\mathbf{A} \dashrightarrow \mathbf{SAS}^{-1}$ var uzskatīt par bāzes maiņas efektu uz $\mathbf{A}$. Tādējādi matrica ir diagonalizējama, ja $\exists$ bāze, attiecībā uz kuru tā ir diagonāla:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \\ f \text{ matrica } \mathbf{F} \end{array} \right. \dashrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\} \\ f \text{ matrica } \mathbf{SFS}^{-1} \end{array} \right.$$

Matricas $\mathbf{A}$ un $\mathbf{SAS}^{-1}$ sauc par *līdzīgām matricām.*

2.3. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a & -a \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$

2.7. teorēma.

1. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir diagonalizējama $\Longleftrightarrow$ $\exists\ n$ lineāri neatkarīgi $\mathbf{A}$ īpašvektori.
2. $\exists\ \mathbf{S}\ :\ \mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{D}$ - diagonāla $\Longrightarrow$ $\mathbf{S}^{-1}$ kolonnas ir $\mathbf{A}$ īpašvektoru koordinātu kolonnas.

PIERĀDĪJUMS

1. $\underline{\Longrightarrow}$

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir diagonalizējama $\Longrightarrow$ $\exists$ bāze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kuru LA matrica $\mathbf{A}' = \mathbf{SAS}^{-1}$ ir diagonāla:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & 0...0 & 0 \\ \hline ... & ... & 0 \\ \hline 0 & 0...0 & \lambda_n \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{A}'\mathbf{e}'_i = \lambda_i \mathbf{e}'_i \Longrightarrow \mathcal{B}' \text{ elementi ir } n$$

lineāri neatkarīgi $\mathbf{A}'$ īpašvektori.

$\underline{\Longleftarrow}$

$\exists\ n$ lineāri neatkarīgi $\mathbf{A}$ īpašvektori $\{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ar īpašvērtībam $\lambda_i \Longrightarrow \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ ir bāze un attiecībā uz to jaunā matrica $\mathbf{A}'$ ir diagonāla.

2. $\mathbf{SAS}^{-1} = \mathbf{D} \Longrightarrow \mathbf{AS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}$.

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{c}_1|...|\mathbf{c}_n] \\ \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{E}_{ii} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{AS}^{-1} = [\mathbf{Ac}_1|...|\mathbf{Ac}_n] \\ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D} = [\lambda_1\mathbf{c}_1|...|\lambda_n\mathbf{c}_n] \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.8. teorēma. $n \times n$ matrica ir diagonalizējama, ja

1. tai $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības,
2. tā ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem uz galvenās diagonāles.

PIERĀDĪJUMS

1. Matricai $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības $\Longrightarrow$ tai ir n lineāri neatkarīgi īpašvektori.

2. Matrica $\mathbf{A}$ ir trijstūrveida formā ar dažādiem elementiem $a_{11}, ..., a_{nn}$ uz diagonāles $\Longrightarrow$ $\forall\, i$ matricai $\mathbf{A} - a_{ii}\mathbf{E}$ uz diagonāles ir vismaz viena nulle $\Longrightarrow$ $\det(\mathbf{A} - a_{ii}\mathbf{E}) = 0 \Longrightarrow$

$a_{ii} \in \mathcal{S}pec(\mathbf{A}) \Longrightarrow$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists\, n$ dažādas īpašvērtības. $\blacksquare$

2.3.2. Triangulācija

Matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ sauc par *triangulējamu*, ja $\exists$ invertējama matrica $\mathbf{S} \in \mathcal{M}at(n,k)$ tāda, ka $\mathbf{SAS}^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida matrica. Šādā gadījumā saka, ka $\mathbf{S}$ *triangulē* $\mathbf{A}$.

Izmantojot bāzes maiņas interpretāciju, var teikt, ka matrica ir triangulējama, ja $\exists$ bāze, attiecībā uz kuru tā ir augšēji trijstūrveida.

2.9. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir triangulējama $\Longleftrightarrow$
$\exists$ bāze $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$:

$$\forall\ i \in \{1, ..., n\}: \ \mathbf{A}\mathbf{g}_i \in \langle \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_i \rangle.$$

PIERĀDĪJUMS

$\underline{\Longrightarrow}$

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,k)$ ir triangulējama $\Longrightarrow$ $\exists$ bāze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, attiecībā uz kuru LA matrica $\mathbf{T} = \mathbf{SAS}^{-1}$ ir augšēji trijstūrveida:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12}...t_{1,n-1} & t_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0...0 & t_{nn} \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{AS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}.$$

$$\mathbf{S}^{-1} = [\mathbf{c}_1|...|\mathbf{c}_n] \Longrightarrow \mathbf{AS}^{-1} = [\mathbf{Ac}_1|...|\mathbf{Ac}_n].$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T} = [t_{11}\mathbf{c}_1|t_{12}\mathbf{c}_1 + t_{22}\mathbf{c}_2|...|\textstyle\sum_{i=1}^{n} t_{in}\mathbf{c}_i].$$

Salīdzinot kolonnas iegūstam, ka $\mathbf{Ac}_i \in \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_i \rangle$.

$\underline{\Longleftarrow}$

$\exists$ bāze $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$: $\mathbf{Ag}_i \in \{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_i\}$ $\Longrightarrow$ pārejot uz jauno bāzi $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$ matrica $\mathbf{SAS}^{-1}$ būs augšēji trijstūrveida formā.

3. 4.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Atrisināt diskrēto dinamisko sistēmu

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}$$

ar sākuma nosacījumu $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1. \end{cases}$

4.2 Vai funkcija $\varphi : \mathcal{M}at(n,n,k) \longrightarrow k[\lambda]$:

$$\varphi(\mathbf{M}) = R_{\mathbf{M}}(\lambda),$$

ir lineārs attēlojums?

4.3 Vai matricas $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline -2 & 9 & 1 \\ \hline 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \in \mathcal{M}at(3,\mathbb{R})$ īpašvērtība λ var apmierināt nosacījumu $4 \leq \lambda \leq 5$?

4.4 Diagonalizēt matricas:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 7 & -5 \\ \hline 10 & -8 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 7 & -4 & 4 \\ \hline 5 & -1 & 5 \\ \hline -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$ (Norādījums: viena no raksturīgā polinoma saknēm ir -1).

4.5 Triangulēt matricas:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 5 & -1 \\ \hline 4 & 1 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 1 & -2 \\ \hline -8 & 2 & -3 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Dots $f(\lambda) \in k[\lambda]$. Atrast matricu, kuras raksturīgais polinoms ir vienāds $f(\lambda)$.

4.7 **A**, **B** - vienāda izmēra kvadrātveida matricas. Pierādīt, ka $R_{\mathbf{AB}}(\lambda) = R_{\mathbf{BA}}(\lambda)$.